Script generated by TTT

Title: Zentraluebung DWT SS2013

Date: Fri Apr 26 16:24:43 CEST 2013

Duration: 86:26 min

Pages: 24

SS 2013

Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/

26. April 2013

ZÜ II

Übersicht:

1. Thema: Hypergeometrische Verteilung
2. Tipps zu HA Blatt 2
3. Vorbereitung auf TA Blatt 2

1. Thema: Hypergeometrische Verteilung

1.1 Beispiel nach Vorlesung

Eine Menge C bestehe aus zwei disjunkten Sorten A bzw. B von Objekten, d.h. $C = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$.

Seien $|A| = a$ und $|B| = b$.

Wir wählen n Elemente aus C,
und zwar x Elemente aus A und $n - x$ Elemente aus B.

In der Vorlesung wurde das Beispiel 19 gebracht, in dem

A eine Menge von 4 Buben eines Skatspiels war,
und B war die Menge der übrigen 28 Skatkarten.

Dann gibt es die folgende Anzahl von Auswahlmöglichkeiten $h(a,b,n,x)$ von Elementen aus A bzw. B:

$$h(a,b,n,x) = \binom{a}{x}\binom{b}{n-x}.$$

Es gilt die Gleichung

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{x=0}^{n} \binom{a}{x}\binom{b}{n-x},$$

die bekannt ist als

Vandermonde'sche Identität

und eine der wichtigsten Gleichungen der Kombinatorik ist. (Siehe Vorl. DS)

Anwendung:

Eine Urne enthält a Kugeln mit dem Wert $+1$ und b Kugeln mit dem Wert -1. Sie entnehmen n Mal eine Kugel, ohne sie zurückzulegen. Jede Kugel wird unter den verbliebenen Kugeln mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entnommen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[x]$, dass x Kugeln mit Wert $+1$ und $n-x$ Kugeln mit dem Wert -1 entnommen wurden?

(Siehe auch HA 2.3)

Lösung:

$$\Pr[x] = \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}.$$

$\Pr[x]$ stellt die Dichte der hypergeometrischen Verteilung der Zahlen $\{0,1,2,\ldots,n\}$ dar, hier bezüglich der Sortenzahlen a,b.

Die Vandermonde Identität stellt sicher, dass $\Pr$ zusammen mit $\Omega = \{0,1,2,\ldots,n\}$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Dieser W'keitsraum $(\Omega, \Pr)$ heißt Hypergeometrische Verteilung.

Bemerkung:

Wenn wir von „Verteilung“ sprechen, dann meinen wir immer einen Wahrscheinlichkeitsraum, im diskreten Fall also $(\Omega, \Pr)$.

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum über $\mathbb{R}$ kann man dann (u.U.)

die Verteilungsdichte und
die kumulative Verteilung (Verteilungsfunktion) angeben.

Bemerkung:

Wenn wir von ,,Verteilung“ sprechen, dann meinen wir immer einen Wahrscheinlichkeitsraum, im diskreten Fall also $(\Omega, \Pr)$.

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum über $\mathbb{R}$ kann man dann (u.U.)

die Verteilungsdichte und
die kumulative Verteilung (Verteilungsfunktion) angeben.

2. Tipps zu HA Blatt 2

Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 2.1:

Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ und zwei Ergebnisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A] \neq \Pr[B]$, so dass gilt:

$$\Pr[A \cap B] \geq 9 \cdot \Pr[A] \cdot \Pr[B] > 0\,.$$

2. Tipps zu HA Blatt 2

Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 2.1:

Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ und zwei Ergebnisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A] \neq \Pr[B]$, so dass gilt:

$$\Pr[A \cap B] \geq 9 \cdot \Pr[A] \cdot \Pr[B] > 0\,.$$

Die Beziehung zwischen $\Pr[A \cap B]$ und dem Produkt $\Pr[A] \cdot \Pr[B]$ hat Bedeutung z.B. in der Form $\frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[A]}$ im Verhältnis zu $\Pr[B]$.

Dabei bedeutet $\frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[A]}$ das ,,Gewicht“ oder die ,,Größe“ von B innerhalb von oder ,,unter der Bedingung von“ A.

Machen Sie sich die Gewichte der Schnittmengen von A und B an Hand eines Venn-Diagramms klar und variieren Sie Ihr Diagramm so, dass B zwar innerhalb des Universums ,,klein“ ist, aber innerhalb der Menge A ,,groß“ ist.

Benutzen Sie die Flächenmaße Ihres Diagramms zur Definition der Wahrscheinlichkeiten.

2. Tipps zu HA Blatt 2

Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 2.1:

Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ und zwei Ergebnisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A] \neq \Pr[B]$, so dass gilt:

$$\Pr[A \cap B] \geq 9 \cdot \Pr[A] \cdot \Pr[B] > 0\,.$$

Die Beziehung zwischen $\Pr[A \cap B]$ und dem Produkt $\Pr[A] \cdot \Pr[B]$ hat Bedeutung z.B. in der Form $\frac{\Pr[A\cap B]}{\Pr[A]}$ im Verhältnis zu $\Pr[B]$.

Dabei bedeutet $\frac{\Pr[A\cap B]}{\Pr[A]}$ das „Gewicht“ oder die „Größe“ von B innerhalb von oder „unter der Bedingung von“ A.

Machen Sie sich die Gewichte der Schnittmengen von A und B an Hand eines Venn-Diagramms klar und variieren Sie Ihr Diagramm so, dass B zwar innerhalb des Universums „klein“ ist, aber innerhalb der Menge A „groß“ ist.

Benutzen Sie die Flächenmaße Ihres Diagramms zur Definition der Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel: Wann ist $\frac{\Pr[A\cap B]}{\Pr[A]} = 1$?

Diese Aufgabe wird wieder interessant werden, wenn es um „unabhängige“ Mengen und um „bedingte Wahrscheinlichkeiten“ geht.

ad HA 2.2:

Entgegen anders lautender Gerüchte hat diese Aufgabe nichts mit den Fußballspielen der laufenden Woche zu tun,

wohl aber mit den 4 Lagemöglichkeiten eines Elementes zu zwei Mengen im allgemeinen Fall.

Nutzen Sie auch hier ein Venn-Diagramm in Verbindung mit der Tatsache der Additivität von Wahrscheinlichkeiten für disjunkte Mengen bzw. Ereignissen.

(siehe Tafel)

ad HA 2.2:

Entgegen anders lautender Gerüchte hat diese Aufgabe nichts mit den Fußballspielen der laufenden Woche zu tun,

wohl aber mit den 4 Lagemöglichkeiten eines Elementes zu zwei Mengen im allgemeinen Fall.

Nutzen Sie auch hier ein Venn-Diagramm in Verbindung mit der Tatsache der Additivität von Wahrscheinlichkeiten für disjunkte Mengen bzw. Ereignissen.

(siehe Tafel)

Microsoft Windows xp
Tablet PC Edition

ad HA 2.3:

Ein Muss für alle Übungsteilnehmer!!

Offenbar gibt es zwei Sorten von Kugeln, die zufällig ausgewählt werden, ähnlich wie bei der Auswahl von 10 Karten in einem Skatspiel und der Unterscheidung nach Buben und Nicht-Buben (siehe Vorlesung Beispiel 19).

Allerdings hängt die Auswahl von unterschiedlichen Abbruchbedingungen ab, die letztendlich den Gewinn realisieren.

Betrachten Sie die erreichte „Spielsituation“ als Inhalt der Urnen vor der nächsten Ziehung.

Bemerkung:
Der momentane Gewinn eignet sich nicht als Spielsituation, weil man möglicherweise in die gleiche Situation zurückkehren kann. Dafür benötigen wir später Markov-Diagramme.

ad HA 2.3:

Ein Muss für alle Übungsteilnehmer!!

Offenbar gibt es zwei Sorten von Kugeln, die zufällig ausgewählt werden, ähnlich wie bei der Auswahl von 10 Karten in einem Skatspiel und der Unterscheidung nach Buben und Nicht-Buben (siehe Vorlesung Beispiel 19).

Allerdings hängt die Auswahl von unterschiedlichen Abbruchbedingungen ab, die letztendlich den Gewinn realisieren.

Betrachten Sie die erreichte „Spielsituation“ als Inhalt der Urnen vor der nächsten Ziehung.

Bemerkung:
Der momentane Gewinn eignet sich nicht als Spielsituation, weil man möglicherweise in die gleiche Situation zurückkehren kann. Dafür benötigen wir später Markov-Diagramme.

Sei X eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf $(\Omega, \Pr)$.

Wiederholung der Definitionen für:

Wertebereich W_X

Dichte f_X

Verteilungsfunktion F_X

Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$

Varianz $\mathrm{Var}[X]$

von X.

1. A priori ist das Gewinn-Ergebnis bei Strategie A klar!

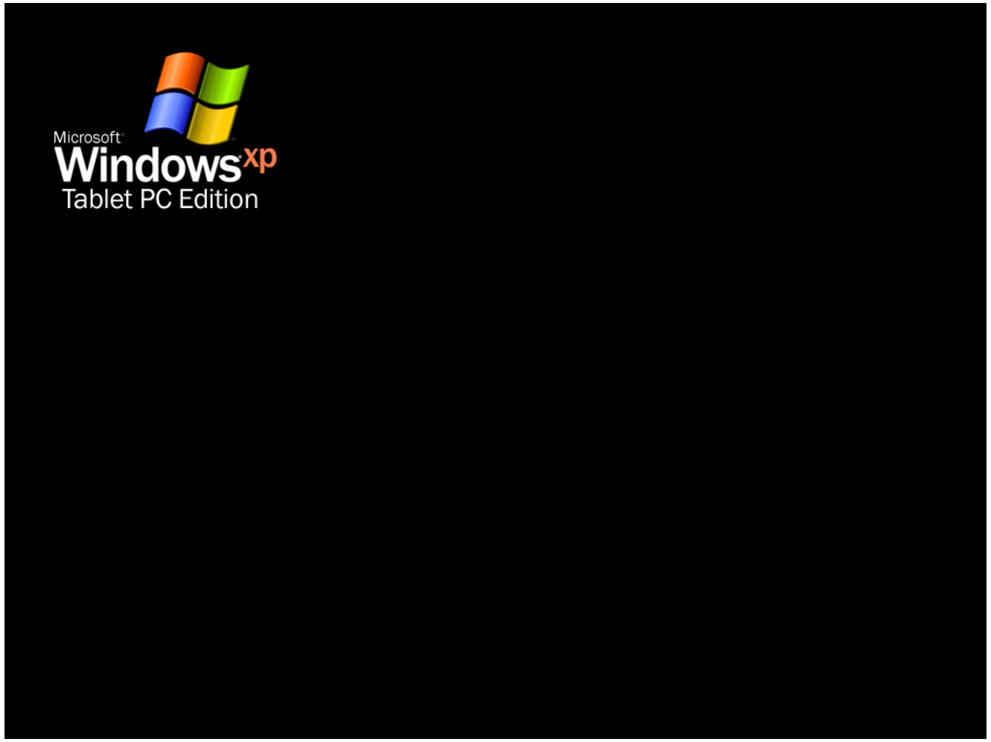
   Stellen Sie trotzdem den Baum der möglichen Übergänge in die Spielsituationen dar.

   Definieren Sie den Ergebnisraum (Blätter des Übergangsbaumes), den G_A abbildet, als Menge von Sequenzen von Spielsituationen!

1. A priori ist das Gewinn-Ergebnis bei Strategie A klar!

   Stellen Sie trotzdem den Baum der möglichen Übergänge in die Spielsituationen dar.

   Definieren Sie den Ergebnisraum (Blätter des Übergangsbaumes), den G_A abbildet, als Menge von Sequenzen von Spielsituationen!



1. A priori ist das Gewinn-Ergebnis bei Strategie A klar!

   Stellen Sie trotzdem den Baum der möglichen Übergänge in die Spielsituationen dar.

   Definieren Sie den Ergebnisraum (Blätter des Übergangsbaumes), den G_A abbildet, als Menge von Sequenzen von Spielsituationen!