

Script generated by TTT

Title: Meixner: Zue\_DWT (05.06.2014)

Date: Thu Jun 05 14:18:41 CEST 2014

Duration: 62:19 min

Pages: 33

SS 2014

## Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/dwt/uebung/>

5. Juni 2014

### 1. Übungsbetrieb

Übungsgruppen in den beiden Nachpfingstwochen:  
Montags-, Dienstags- und Mittwochsgruppen  
in der **zweiten Woche**,  
Donnerstags- und Freitagsgruppen  
in der **ersten Woche**

Fristverlängerung Hausaufgabenabgabe Blatt 8:  
**Abgabe bis 18.6., 10 Uhr**

Aktuelle Fragen, Anregungen?

### 2. Thema Gamma- und Normalverteilung

Ähnlich wie bei diskreten Verteilungen, gibt es bei kontinuierlichen Verteilungen

**Familien zusammengehöriger Verteilungen**,

wie z.B.

die Gammaverteilungen und die Normalverteilungen.

Zu den Gammaverteilungen zählen insbesondere die Erlangverteilungen, mit der Exponentialverteilung als Spezialfall.

## 2.1 Gammaverteilung

### Definition

Eine kontinuierliche Zufallsvariable  $X$  ist **Gammaverteilt** von der Ordnung  $r$  mit Parameter  $\lambda$  mit reellen Werten  $r > 0$  und  $\lambda > 0$ , i.Z.  $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ , falls für die Dichte  $f_X$  von  $X$  gilt

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot I_{(0, \infty)}(x),$$

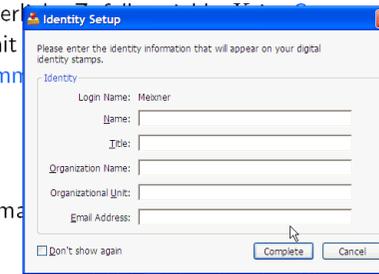
mit der Gammafunktion

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{r-1} e^{-t} dt.$$

## 2.1 Gammaverteilung

### Definition

Eine kontinuierliche Zufallsvariable  $X$  ist **Gammaverteilt** von der Ordnung  $r$  mit Parameter  $\lambda$  mit reellen Werten  $r > 0$  und  $\lambda > 0$ , i.Z.  $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ , falls für die Dichte  $f_X$  von  $X$  gilt



An "Identity Setup" dialog box with a blue title bar and a close button. The text inside says: "Please enter the identity information that will appear on your digital identity stamps." Below this, there are several input fields: "Login Name: Meixner", "Name:", "Title:", "Organization Name:", "Organizational Unit:", and "Email Address:". At the bottom, there is a checkbox labeled "Don't show again" and two buttons: "Complete" and "Cancel".

mit der Gammafunktion

$$\int_0^{\infty}$$

### Erinnerung

$$\begin{aligned}\Gamma(r+1) &= r \cdot \Gamma(r), \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

### Eigenschaften

1.  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ ,
2.  $\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ ,
3. Faltungseigenschaft:

$$\begin{aligned}X \sim \text{Gamma}(r, \lambda), Y \sim \text{Gamma}(s, \lambda) \text{ und } X, Y \text{ unabhängig} \\ \Rightarrow X + Y \sim \text{Gamma}(r + s, \lambda).\end{aligned}$$

## 2.1 Gammaverteilung

### Definition

Eine kontinuierliche Zufallsvariable  $X$  ist **Gammaverteilt** von der Ordnung  $r$  mit Parameter  $\lambda$  mit reellen Werten  $r > 0$  und  $\lambda > 0$ , i.Z.  $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ , falls für die Dichte  $f_X$  von  $X$  gilt

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot I_{(0, \infty)}(x),$$

mit der Gammafunktion

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{r-1} e^{-t} dt.$$

## Erinnerung

$$\Gamma(r+1) = r \cdot \Gamma(r),$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und}$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

## Eigenschaften

1.  $\mathbb{E}[X] = \frac{r}{\lambda}$ ,
2.  $\text{Var}[X] = \frac{r}{\lambda^2}$ ,
3. Faltungseigenschaft:  
 $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ ,  $Y \sim \text{Gamma}(s, \lambda)$  und  $X, Y$  unabhängig  
 $\implies X + Y \sim \text{Gamma}(r + s, \lambda)$ .

## Allgemeine Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  mit einer geeigneten Induktion die Verteilungsfunktion einer  $\text{Gamma}(n, \lambda)$ -verteilten ZV.

*Bemerkung:* Gesucht ist ein integralfreier Ausdruck für die Verteilungsfunktion.

In VA 1 lösen wir diese Aufgabe für  $n = 3$ .

Die Verteilung der Summe  $Y$  von  $n$  unabhängigen, mit Parameter  $\lambda$  exponentialverteilten ZV  $X_1, X_2, \dots, X_n$  heißt

**Erlang-Verteilung** der Ordnung  $n$ .

Sie besitzt für  $x > 0$  die angegebene Dichte

$$f_Y(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}.$$

Man berechnet die Dichte durch wiederholte Faltung.

Die **Exponentialverteilung** ist Spezialfall der Erlangverteilung mit  $n = 1$ .

Die Verteilungsfunktion

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^x f_Y(t) dt$$

berechnet man durch partielle Integration.

Dabei tritt eine **Rekursionsformel**

$$F_{S_n}(x) = A + F_{S_{n-1}}(x)$$

auf, wobei  $S_n$  jeweils für  $Y$  steht.

Den gesuchten Ausdruck erhält man dann durch Aufsummieren.

Die Verteilung der Summe  $Y$  von  $n$  unabhängigen, mit Parameter  $\lambda$  exponentialverteilten ZV  $X_1, X_2, \dots, X_n$  heißt

**Erlang-Verteilung** der Ordnung  $n$ .

Sie besitzt für  $x > 0$  die angegebene Dichte

$$f_Y(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}.$$

Man berechnet die Dichte durch wiederholte Faltung.

Die **Exponentialverteilung** ist **Spezialfall** der Erlangverteilung mit  $n = 1$ .

Die Verteilungsfunktion

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^x f_Y(t) dt$$

berechnet man durch partielle Integration.

Dabei tritt eine **Rekursionsformel**

$$F_{S_n}(x) = A + F_{S_{n-1}}(x)$$

auf, wobei  $S_n$  jeweils für  $Y$  steht.

Den gesuchten Ausdruck erhält man dann durch Aufsummieren.

## 2.2 Normalverteilung

### Definition

Eine kontinuierliche Zufallsvariable  $X$  heißt **normalverteilt** mit den Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , i.Z.  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , falls für die Dichte  $f_X$  von  $X$  gilt

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

$\mathcal{N}(0, 1)$  heißt **Standardnormalverteilung**.

## 2.2 Normalverteilung

### Definition

Eine kontinuierliche Zufallsvariable  $X$  heißt **normalverteilt** mit den Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , i.Z.  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , falls für die Dichte  $f_X$  von  $X$  gilt

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

$\mathcal{N}(0, 1)$  heißt **Standardnormalverteilung**.

## Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Bezeichnung:

$$\Phi(x; \mu, \sigma) := F(x).$$

$$\Phi(x) := \Phi(x; 0, 1).$$

## Eigenschaften

1.  $\mathbb{E}[X] = \mu$ ,
2.  $\text{Var}[X] = \sigma^2$ ,
3. Faltungseigenschaft:  
 $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$   
und  $X_1, X_2$  unabhängig mit  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1^2 + a_2^2 \neq 0$   
 $\implies a_1 X_1 + a_2 X_2 \sim \mathcal{N}(a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2, a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2)$ .
4. Lineare Transformation:  
 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$   
 $\implies aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2 \sigma^2)$ .

## 3. Vorbereitung Blatt 8

### 3.1 VA 1

Seien  $X_1$  und  $X_2$  unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$ .

- 1 Berechnen Sie die Dichtefunktion von  $Y = X_1 + X_2$  durch Anwendung der Faltungsformel

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(y-x) dx$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis im Fall  $\lambda_1 = \lambda_2$  so weit wie möglich.

- 2 Seien  $X_1, X_2, X_3$  unabhängig exponentialverteilt mit gleichem Parameter  $\lambda$  und  $Y = X_1 + X_2 + X_3$ . Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F_Y$  in geschlossener Form.

(1)

Berechnen Sie die Dichtefunktion von  $Y = X_1 + X_2$  durch Anwendung der Faltungsformel

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(y-x) dx$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis im Fall  $\lambda_1 = \lambda_2$  so weit wie möglich.

Lösung

Es gilt  $f_{X_1}(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$  und  $f_{X_2}(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$ . Damit folgt, wenn  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  gilt, für  $y \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2(y-x)} dx \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \left[ \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_{x=0}^{x=y} \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)y} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2 - \lambda_1}
 \end{aligned}$$

zue06.pdf - Adobe Acrobat Professional

File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

44 / 117 168%

Find

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2(y-x)} dx \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \left[ \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_{x=0}^{x=y} \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)y} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2 - \lambda_1}
 \end{aligned}$$

TUM ZÜ DWT  
©Dr. Werner Meixner

14/27

EA

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2(y-x)} dx \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \left[ \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_{x=0}^{x=y} \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)y} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2 - \lambda_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2(y-x)} dx \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \left[ \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_{x=0}^{x=y} \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)y} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2 - \lambda_1}
 \end{aligned}$$

Im Fall  $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$  gilt

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(y-x)} dx \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda y} \int_0^y dx \\ &= \lambda^2 y e^{-\lambda y}. \end{aligned}$$

Für  $y \leq 0$  folgt in allen Fällen direkt  $f_Y(y) = 0$ .

Seien  $X_1, X_2, X_3$  unabhängig exponentialverteilt mit gleichem Parameter  $\lambda$  und  $Y = X_1 + X_2 + X_3$ . Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F_Y$  in geschlossener Form.

Lösung

Wir wenden die Faltungsformel noch einmal an, und zwar auf  $f_{X_1+X_2}$  und  $f_{X_3}$ , wie folgt.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1+X_2}(x) \cdot f_{X_3}(y-x) dx \\ &= \int_0^y \lambda^2 x e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(y-x)} dx \\ &= \lambda^3 e^{-\lambda y} \cdot \int_0^y x dx \\ &= \frac{\lambda^3 y^2}{2} e^{-\lambda y}. \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion  $F_Y$  kann nun durch Integration der Dichtefunktion  $f_Y$  berechnet werden, wie es im Folgenden ausführlich dokumentiert wird.

Wir wenden insbesondere partielle Integration an.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^y f_Y(x) dx \\ &= \int_0^y \frac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x} dx \\ &= (-\lambda^2) \int_0^y \frac{x^2}{2} \cdot (-\lambda) e^{-\lambda x} dx \\ &= (-\lambda^2) \left[ \frac{x^2}{2} \cdot e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=y} - (-\lambda^2) \int_0^y x \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda \int_0^y x \cdot (-\lambda) e^{-\lambda x} dx \\ &= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda \left( \left[ x \cdot e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=y} - \int_0^y e^{-\lambda x} dx \right) \\ &= \text{(Fortsetzung nächste Folie)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda \left( [x \cdot e^{-\lambda x}]_{x=0}^{x=y} - \int_0^y e^{-\lambda x} dx \right) \\
&= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda y e^{-\lambda y} - \int_0^y (-\lambda) e^{-\lambda x} dx \\
&= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda y e^{-\lambda y} - [e^{-\lambda x}]_{x=0}^{x=y} \\
&= 1 - \frac{\lambda^2 y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda y e^{-\lambda y} - e^{-\lambda y}.
\end{aligned}$$

#### Bemerkung

Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängige mit Parameter  $\lambda$  exponentialverteilte Zufallsvariable. Die Zufallsvariable  $Y = X_1 + \dots + X_n$  besitzt die sogenannte Erlang-Verteilung

$$F_Y(y) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda y)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda y}.$$

### 3.2 VA 2

Sei  $X$  eine kontinuierliche Zufallsvariable.

- 1 Zeigen Sie: Falls  $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$ , dann gilt  $2X + 1 \sim \mathcal{N}(5, 2)$ .
- 2 Seien  $d_1, d_2, c \in \mathbb{R}$  mit  $d_1 < d_2$  und  $c > 0$ . Berechnen Sie  $a, b \in \mathbb{R}$ , so dass für  $Y = aX + b$  gilt

$$\Pr[d_1 \leq X \leq d_2] = \Pr[-c \leq Y \leq c].$$

(2)

Seien  $d_1, d_2, c \in \mathbb{R}$  mit  $d_1 < d_2$  und  $c > 0$ . Berechnen Sie  $a, b \in \mathbb{R}$ , so dass für  $Y = aX + b$  gilt

$$\Pr[d_1 \leq X \leq d_2] = \Pr[-c \leq Y \leq c].$$

#### Lösung

Sei  $a > 0$ . Dann gilt

$$d_1 \leq X \leq d_2 \iff ad_1 + b \leq Y \leq ad_2 + b.$$

Wir lösen für  $a, b$  die Gleichungen

$$ad_1 + b = -c \quad \text{und} \quad ad_2 + b = c.$$

Lösung:

$$a = \frac{2c}{d_2 - d_1}, \quad b = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2} \cdot c.$$

### 3.3 VA 3

Wir betrachten unabhängige stetige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , die beide auf dem Intervall  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  gleichverteilt sind.

Sei  $Z = \max\{X, Y\}$ .

- 1 Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F_Z$ .
- 2 Bestimmen Sie eine Funktion  $u: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , so dass  $u(X)$  die gleiche Verteilung wie  $Z$  besitzt.

Dann gilt

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \Pr[Y \leq y] = \Pr[u(X) \leq y] \\ &= \Pr[X \leq u^{-1}(y)] \\ &= F_X(u^{-1}(y)) \\ &= u^{-1}(y).\end{aligned}$$

Aus der Gleichung  $F_Z(y) = F_X(u^{-1}(y))$  folgt nun  $y^2 = u^{-1}(y)$ ,  
mithin

$$u(x) = \sqrt{x}.$$

The image shows a screenshot of a PDF viewer window titled "ue06.pdf - Adobe Acrobat Professional". The window displays the same mathematical derivation as the left image. The text is centered on the page. The viewer's interface includes a menu bar (File, Edit, View, Document, Comments, Forms, Tools, Advanced, Window, Help), a toolbar with various icons, and a search bar. The status bar at the bottom of the window shows the TUM logo, "ZÜ DWT ©Dr. Werner Meixner", "3.3 VA 3", "27/27", and the LEA logo.

Dann gilt

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \Pr[Y \leq y] = \Pr[u(X) \leq y] \\ &= \Pr[X \leq u^{-1}(y)] \\ &= F_X(u^{-1}(y)) \\ &= u^{-1}(y).\end{aligned}$$

Aus der Gleichung  $F_Z(y) = F_X(u^{-1}(y))$  folgt nun  $y^2 = u^{-1}(y)$ ,  
mithin

$$u(x) = \sqrt{x}.$$