

Script generated by TTT

Title: Meixner: Zue\_DWT (05.07.2013)

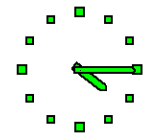
Date: Fri Jul 05 16:15:08 CEST 2013

Duration: 89:56 min

Pages: 30



SS 2013



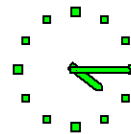
## Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/>

5. Juli 2013



### 2. Thema: Nachtrag HA 8.2

#### Aufgabenstellung

Seien  $\Phi$  bzw.  $\Theta$  unabhängige ZV mit  $\Phi$  gleichverteilt auf  $[-\pi, \pi)$  bzw.  $[0, 1]$ . Dann ist durch

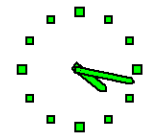
$$G(\Phi, \Theta) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cos \Phi + y \sin \Phi = \Theta\}$$

eine zufällige Gerade im  $\mathbb{R}^2$  beschrieben, wobei  $\Theta$  den Abstand der Geraden vom Ursprung angibt.

(a) Für ein festes  $r \in [0, \infty)$  sei  
 $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = r\}$ .

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

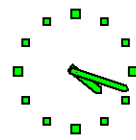
$$\Pr[G(\Phi, \Theta) \cap K_r \neq \emptyset].$$



## ZÜ IX

### Übersicht:

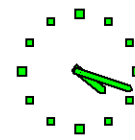
1. Termine
2. Thema: Nachtrag HA 8.2
3. Tipps zu HA Blatt 11



- (b) Für ein festes  $\rho \in [0, \pi]$  sei  
 $L_\rho = \{(\cos \alpha, \sin \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [-\rho/2, \rho/2]\}$ .  
 Bestimmen Sie wiederum die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[G(\Phi, \Theta) \cap L_\rho \neq \emptyset].$$

(Hinweis beachten)



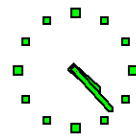
### Tipps

Wenn  $\Phi$  und  $\Theta$  unabhängige Zufallsvariable sind, dann müssen beide Abbildungen auf einer gemeinsamen Ergebnismenge  $\Omega$  eines Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$  definiert sein, mithin die Funktionalität  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  haben.

Für  $\Omega$  kommt  $[-\pi, \pi) \times [0, 1]$  in Frage mit  $\Phi((x, y)) = x$  und  $\Theta((x, y)) = y$ .

$\Pr$  kann man aufgrund der genannten Unabhängigkeit aus den gegebenen Randdichten von  $\Phi$  bzw.  $\Theta$  herleiten.

Das führt zur Gleichverteilung auf der Fläche  $\Omega$ , wobei  $\Pr[A]$  durch das Flächenverhältnis von  $A$  zu  $\Omega$  gegeben ist.



### Lösung (b):

Wir bestimmen die Punktmenge  $E$  aller Punkte  $(\phi, \vartheta) \in [-\pi, \pi) \times [0, 1]$ , so dass  $G(\phi, \vartheta) \cap L_\rho \neq \emptyset$ .

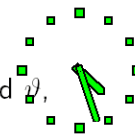
$E$  ist symmetrisch zur  $\Theta$ -Achse :  $(\phi, \vartheta) \in E \implies (-\phi, \vartheta)$ .

Es reicht aus, die Menge  $E^+ = E \cap [0, \pi) \times [0, 1]$  zu bestimmen.

Für  $\vartheta = 1$  gilt:

$$(\phi, \vartheta) \in E^+ \iff 0 \leq \phi \leq \rho/2.$$

D.h., dass für  $\vartheta = 1$  die Geraden aus  $G(\phi, \vartheta)$  mit  $0 \leq \phi$  das Kreissegment  $L_\rho$  gerade berühren, falls  $0 \leq \phi \leq \rho/2$  gilt.



Wir erweitern die Aussage für Geraden mit kleinerem Abstand  $\vartheta$ , und zwar zunächst für  $\cos \frac{\rho}{2} \leq \vartheta \leq 1$  wie folgt:

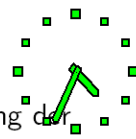
$$(\phi, \vartheta) \in E^+ \iff 0 \leq \phi \leq \frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta.$$

Also ist die obere Begrenzung von  $\phi$  für alle  $\vartheta$  mit  $\cos \frac{\rho}{2} \leq \vartheta \leq 1$  durch die Funktion  $r(\vartheta) = \frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta$  gegeben

und es gilt für alle  $\vartheta$  mit  $\cos \frac{\rho}{2} \leq \vartheta \leq 1$  die Bestimmung

$$(\phi, \vartheta) \in E^+ \iff 0 \leq \phi \leq r(\vartheta).$$

Man kann diesen Teil von  $E^+$  als Fläche unterhalb der Funktion  $r(\vartheta)$  im Abschnitt  $\vartheta \in [\cos \frac{\rho}{2}, 1]$  auffassen.



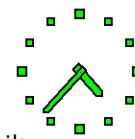
Die nächste und letzte Erweiterung besteht in der Bestimmung der Menge  $E^+$  im Bereich  $0 \leq \vartheta \leq \cos \frac{\rho}{2}$ .

Man sieht, dass eine Gerade mit Abstand  $\vartheta < \cos \frac{\rho}{2}$  und Drehwinkel  $\phi = 0$  den Sektor  $L_\rho$  nicht mehr schneidet.

Man erhält einen Schnitt mit  $L_\rho$  bei positiver Drehung  $\alpha$  erstmalig für  $\alpha = -\frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta$ .

Für alle  $\vartheta$  mit  $0 \leq \vartheta \leq \cos \frac{\rho}{2}$  gilt die Bestimmung

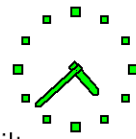
$$(\phi, \vartheta) \in E^+ \iff -\frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta \leq \phi \leq \frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta.$$



Da  $\vartheta \in [\cos \frac{\rho}{2}, 1]$  genau dann gilt, wenn  $-\frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta \leq 0$  gilt, können wir vereinfachen und  $E^+$  insgesamt wie folgt charakterisieren:

$$(\phi, \vartheta) \in E^+ \iff \vartheta \in [0, 1], 0 \leq \phi, \text{ und } -\frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta \leq \phi \leq \frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta.$$

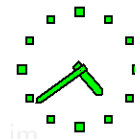
Diese Charakterisierung kann nun bequem zur Berechnung der Fläche von  $E$  benutzt werden



Da  $\vartheta \in [\cos \frac{\rho}{2}, 1]$  genau dann gilt, wenn  $-\frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta \leq 0$  gilt, können wir vereinfachen und  $E^+$  insgesamt wie folgt charakterisieren:

$$(\phi, \vartheta) \in E^+ \iff \vartheta \in [0, 1], 0 \leq \phi, \text{ und } -\frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta \leq \phi \leq \frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta.$$

Diese Charakterisierung kann nun bequem zur Berechnung der Fläche von  $E$  benutzt werden



### Flächenberechnung $F_{E^+}$ :

Beobachtung: Nach dem Prinzip von Cavalieri ist die Fläche im Streifen  $\vartheta \in [0, 1]$  zwischen den beiden Randkurven  $l(\vartheta) = -\frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta$  und  $r(\vartheta) = \frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta$  gleich dem Rechteck mit Seitenlängen  $\rho$  und 1.

Allerdings muss nun die Bedingung  $0 \leq \phi$  durch Abschneiden des Flächenstückes  $R$  für negative  $\phi$  berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho}{2} - \int_0^{\rho/2} \cos t \, dt = \frac{\rho}{2} - [\sin t]_0^{\rho/2} \\ &= \frac{\rho}{2} - \sin \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

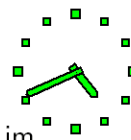


### Flächenberechnung $F_{E^+}$ :

**Beobachtung:** Nach dem Prinzip von Cavallieri ist die Fläche im Streifen  $\vartheta \in [0, 1]$  zwischen den beiden Randkurven  $l(\vartheta) = -\frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta$  und  $r(\vartheta) = \frac{\rho}{2} + \arccos \vartheta$  gleich dem Rechteck mit Seitenlängen  $\rho$  und 1.

Allerdings muss nun die Bedingung  $0 \leq \phi$  durch Abschneiden des Flächenstückes  $R$  für negative  $\phi$  berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho}{2} - \int_0^{\rho/2} \cos t \, dt = \frac{\rho}{2} - [\sin t]_0^{\rho/2} \\ &= \frac{\rho}{2} - \sin \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

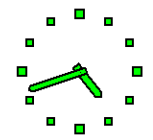


### Ergebnis:

$$\begin{aligned} F_{E^+} &= \rho - R \\ &= \frac{\rho}{2} + \sin \frac{\rho}{2}, \\ F_E &= 2 \cdot F_{E^+} \\ &= \rho + 2 \sin \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} \Pr[(\Phi, \Theta) \in E] &= \Pr[G(\Phi, \Theta) \cap L_\rho \neq \emptyset] \\ &= \frac{F_E}{2\pi} \\ &= \frac{\rho + 2 \sin \frac{\rho}{2}}{2\pi}. \end{aligned}$$



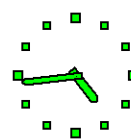
### 3.1 Tipps zu HA 11.1

#### Aufgabenstellung (verkürzt):

Gegeben sei eine Zufallsvariable 'Notenverteilung'  $N$  mit diskreten Werten  $W_N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Annahme für Wahrscheinlichkeiten  $\Pr[N = i] = p_i$ :  
 $p_1 = 0.05, p_2 = 0.05, p_3 = 0.2, p_4 = 0.4$  und  $p_5 = 0.3$ .

Zur Prüfung der Hypothese  $H_0 : \Pr[N = i] = p_i \forall i$ ,  
dass nämlich die angenommenen Wahrscheinlichkeiten alle zutreffen,  
wird ein  $\chi^2$ -Anpassungstest zum Signifikanzniveau 0.1 verwendet.



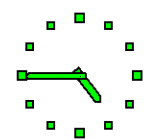
### 3.1 Tipps zu HA 11.1

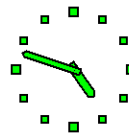
#### Aufgabenstellung (verkürzt):

Gegeben sei eine Zufallsvariable 'Notenverteilung'  $N$  mit diskreten Werten  $W_N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Annahme für Wahrscheinlichkeiten  $\Pr[N = i] = p_i$ :  
 $p_1 = 0.05, p_2 = 0.05, p_3 = 0.2, p_4 = 0.4$  und  $p_5 = 0.3$ .

Zur Prüfung der Hypothese  $H_0 : \Pr[N = i] = p_i \forall i$ ,  
dass nämlich die angenommenen Wahrscheinlichkeiten alle zutreffen,  
wird ein  $\chi^2$ -Anpassungstest zum Signifikanzniveau 0.1 verwendet.



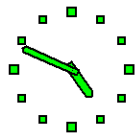


- 1 Kann die folgende Häufigkeitsverteilung der Notenvergabe bei  $n = 120$  Klausuren abgelehnt werden?

$$h_5 = 41, \quad h_4 = 51, \quad h_3 = 20, \quad h_2 = 5, \quad h_1 = 4.$$

- 2 Für welchen maximalen Wert von  $r \geq 0$  kann die folgende Häufigkeitsverteilung noch akzeptiert werden:

$$h'_5 = 41 + r, \quad h'_4 = 51, \quad h'_3 = 20 - r, \quad h'_2 = 5, \quad h'_1 = 4.$$

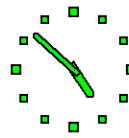


### Tipps dazu:

Im  $\chi^2$ -Anpassungstest werden die Häufigkeiten  $h_i$  von  $k$  Werten mit den a priori geforderten Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  verglichen und dann entschieden, ob die gemessenen Häufigkeiten im Rahmen der geforderten  $p_i$  als unwahrscheinlich bewertet und deshalb abgelehnt werden müssen.

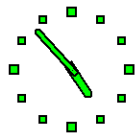
Die Abweichung wird durch die folgende Zufallsvariable gemessen.

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i}.$$



- (a) Falls  $T > 7,78$  gilt, dann müsste die Fakultät mahnen. Verifizieren Sie diese Aussage. Den Wert von  $\chi^2_{4,0.9}$  finden Sie auch in der Tabelle C im Anhang des Buches Schickinger/Steger. (siehe Tafel)

- (b) Falls ein  $h_i$  von  $r$  linear abhängt, dann ist  $T$  ein quadratisches Polynom in  $r$ . Die zu lösende Ungleichung erfordert die Bestimmung einer Nullstelle eines quadratischen Polynoms. (siehe Tafel)

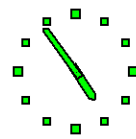


### Tipps dazu:

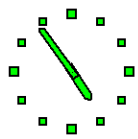
Im  $\chi^2$ -Anpassungstest werden die Häufigkeiten  $h_i$  von  $k$  Werten mit den a priori geforderten Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  verglichen und dann entschieden, ob die gemessenen Häufigkeiten im Rahmen der geforderten  $p_i$  als unwahrscheinlich bewertet und deshalb abgelehnt werden müssen.

Die Abweichung wird durch die folgende Zufallsvariable gemessen.

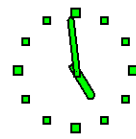
$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i}.$$



- (a) Falls  $T > 7,78$  gilt, dann müsste die Fakultät mahnen. Verifizieren Sie diese Aussage. Den Wert von  $\chi_{4,0.9}^2$  finden Sie auch in der Tabelle C im Anhang des Buches Schickinger/Steger. (siehe Tafel)
- (b) Falls ein  $h_i$  von  $r$  linear abhängt, dann ist  $T$  ein quadratisches Polynom in  $r$ . Die zu lösende Ungleichung erfordert die Bestimmung einer Nullstelle eines quadratischen Polynoms. (siehe Tafel)



- (a) Falls  $T > 7,78$  gilt, dann müsste die Fakultät mahnen. Verifizieren Sie diese Aussage. Den Wert von  $\chi_{4,0.9}^2$  finden Sie auch in der Tabelle C im Anhang des Buches Schickinger/Steger. (siehe Tafel)
- (b) Falls ein  $h_i$  von  $r$  linear abhängt, dann ist  $T$  ein quadratisches Polynom in  $r$ . Die zu lösende Ungleichung erfordert die Bestimmung einer Nullstelle eines quadratischen Polynoms. (siehe Tafel)



### 3.2 Tipps zu HA 11.2

#### Aufgabenstellung (verkürzt):

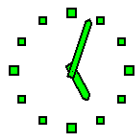
**Gegeben:** Umfrage zu Konsum eines Produkts.

Jeder Befragte hält sich an das folgende Protokoll:

- Falls er ein Konsument des Produkts ist, so antwortet er mit „Ja“.
- Andernfalls wirft er eine faire Münze. Zeigt die Münze „Kopf“, antwortet er mit „Ja“, andernfalls mit „Nein“.

**Annahmen:**  $p$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Befragte ein Konsument des Produkts ist.

**Aufgabe:** Es ist durch Auswertung der Umfrage festzustellen, ob  $p = 0$  angenommen werden darf.

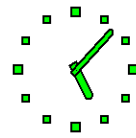


#### Konstruktion eines Tests:

- Annahmen
- Testgröße
- Nullhypothese
- Ablehnungsbereich

#### Daten:

- Teilnehmer: 237
- Ja: 124
- Nein: 113



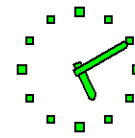
### Tipps dazu:

Die Anzahl der Nein definiert eine Zufallsvariable  $T$  mit Binomialverteilung  $\text{Bin}(237, p')$ .

Man bestimme zunächst  $p'$  in Abhängigkeit von  $p$ .

Nun bestimme man für  $p = 0$  ein möglichst großes Intervall  $[0, k]$ , so dass  $\Pr[T \leq k] \leq 0.1$  gilt und verwende  $k$  als Ablehnungskriterium.

Man kann auch alternativ mit der Anzahl der Ja im Schema der Tests mit Hypothesen arbeiten.



Für die Konstruktion von Tests gibt es immer mehrere Möglichkeiten!

Möglichkeit:  $H_0: p' \geq \frac{1}{2}$  mit  $H_1: p' < \frac{1}{2}$ .

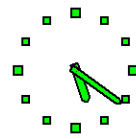
Konstruktion Ablehnungsbereich:

$$\Pr[T \leq k] = \Pr\left[\frac{T - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{k - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}\right] \leq 0.1$$

$$\approx \Phi\left(\frac{k - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}\right).$$

Quantil:  $z_{0.1} = -1,28 \dots$

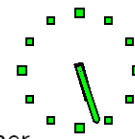
$k = ?$  (usw. siehe Tafel)



### 3.3 Tipps zu HA 11.3

#### Aufgabenstellung (verkürzt):

- (a) Bestimmen Sie den ML-Schätzer  $\hat{\lambda}$  für den Parameter  $\lambda > 0$  einer  $\Gamma(\lambda, 3)$ -Verteilung. Wie hängt  $\hat{\lambda}$  mit dem Stichprobenmittel  $\bar{X}$  zusammen?
- (b) Sei  $n > 3$ .  
Ist  $\hat{\lambda}$  erwartungstreu bzgl.  $\lambda$ ?  
Ist  $\hat{\lambda}$  konsistent im quadratischen Mittel bzgl.  $\lambda$ ?



### Tipps dazu:

Betrachten Sie  $n$  unabhängige und  $\Gamma(\lambda, 3)$ -verteilte Stichprobenvariable  $X_i$ . Für die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Stichprobe  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  gilt  $L(\lambda; \vec{x}) = \prod_{i \in [n]} f_{X_i}(x_i)$ .

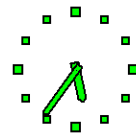
- (a) Nun bestimmt man für festes  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  den Parameterwert  $\hat{\lambda}$ , so dass  $L(\hat{\lambda}; \vec{x})$  das Maximum aller  $L(\lambda; \vec{x})$  ist.

Dazu faktorisiert man die Ableitung  $\frac{d}{d\lambda} L(\lambda; \vec{x})$  und setzt einen der Faktoren gleich Null.

Man erhält  $\hat{\lambda}$  als Funktion von  $\bar{X}$ .  $\hat{\lambda}$  ist eine Zufallsvariable über dem gemeinsamen W'keitsraum der  $X_i$ .

Beachten Sie, dass die W'keitsverteilung von  $\bar{X}$  leicht bestimmt werden kann!

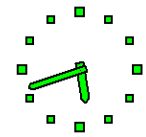
Vermutung:  $\hat{\lambda} = 3/\bar{X}$ ? (siehe Tafel)



- (b) Um  $\mathbb{E}[\hat{\lambda}] = \lambda$  überprüfen zu können, muss man zunächst die Dichtefunktion für  $\hat{\lambda}$  durch Ableitung der Verteilungsfunktion  $F_{\hat{\lambda}}(t) = \Pr[\hat{\lambda} \leq t]$  berechnen.

Informieren Sie sich über die Ableitung von bestimmten Integralen nach einem Parameter  $t$ , der nur in einer Integrationsgrenze enthalten ist.

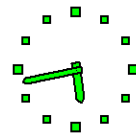
(siehe Tafel)



- (b) Um  $\mathbb{E}[\hat{\lambda}] = \lambda$  überprüfen zu können, muss man zunächst die Dichtefunktion für  $\hat{\lambda}$  durch Ableitung der Verteilungsfunktion  $F_{\hat{\lambda}}(t) = \Pr[\hat{\lambda} \leq t]$  berechnen.

Informieren Sie sich über die Ableitung von bestimmten Integralen nach einem Parameter  $t$ , der nur in einer Integrationsgrenze enthalten ist.

(siehe Tafel)



- (b) Um  $\mathbb{E}[\hat{\lambda}] = \lambda$  überprüfen zu können, muss man zunächst die Dichtefunktion für  $\hat{\lambda}$  durch Ableitung der Verteilungsfunktion  $F_{\hat{\lambda}}(t) = \Pr[\hat{\lambda} \leq t]$  berechnen.

Informieren Sie sich über die Ableitung von bestimmten Integralen nach einem Parameter  $t$ , der nur in einer Integrationsgrenze enthalten ist.

(siehe Tafel)