**Script** generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_DS_WS2014 (19.11.2014)

Date: Wed Nov 19 17:04:23 CET 2014

Duration: 66:24 min

Pages: 28

## 2. Thema: Limes und Landausymbole

Zwischen Grenzwert und Wachstum gibt es enge Beziehungen.

Siehe insbesondere Vorbereitungsaufgabe 3.2.



### 2.1 Limes

Definition des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = a$$

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon : |f(n) - a| < \varepsilon$$

Sprechweise:
$a$ ist Grenzwert der Funktion $f(n)$, wenn das $n$ gegen $\infty$ geht.
$a = +\infty$ ist zulässig.
Es wird hier gerne die Bezeichnung $\varepsilon$ gewählt, weil man dabei an immer kleiner werdende Schranken denkt.



### 2.2 Wachstum $o(g)$

Definition Wachstum $f \in o(g)$

$$f \in o(g)$$

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_c \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c : |f(n)| < c \cdot g(n) .$$

Sprechweise:
$f$ wächst lansamer als $g$, falls $f \in o(g)$.
$o(g)$ ist definiert als die Menge aller Funktionen $f$, die langsamer wachsen als $g$.

Zusammenhang von Grenzwert und Wachstum:

**Satz**

Seien $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = a \iff (f - a) \in o(1)\,.$$

**Beweis**

$\lim_{n\to\infty} f(n) = a$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ :\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon :\ |f(n) - a| < \varepsilon \\
&\iff \forall c \in \mathbb{R}^+ :\ \exists n_c \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c :\ |f(n) - a| < c \cdot 1 \\
&\iff (f(n) - a) \in o(1)\,.
\end{aligned}$$



Zusammenhang von Grenzwert und Wachstum:

Satz

Seien $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = a \iff (f - a) \in o(1)\,.$$

Beweis

$\lim_{n\to\infty} f(n) = a$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ :\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon :\ |f(n) - a| < \varepsilon \\
&\iff \forall c \in \mathbb{R}^+ :\ \exists n_c \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c :\ |f(n) - a| < c \cdot 1 \\
&\iff (f(n) - a) \in o(1)\,.
\end{aligned}$$



## 3. Vorbereitung

### 3.1 VA 1

Wir setzen ein Universum $U$ voraus, das mindestens die Mengen $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}$ und die Menge $F$ aller Abbildungen von $\mathbb{N}_0$ in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ umfasst. Desweiteren seien soweit erforderlich Relationen und Operationen enthalten.

Wir setzen voraus, dass die benötigten Prädikat- und Funktionssymbole in der Prädikatenlogik vorhanden sind.



3. Vorbereitung

3.1 VA 1

Wir setzen ein Universum $U$ voraus, das mindestens die Mengen $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}$ und die Menge $F$ aller Abbildungen von $\mathbb{N}_0$ in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ umfasst. Desweiteren seien soweit erforderlich Relationen und Operationen enthalten.

Wir setzen voraus, dass die benötigten Prädikat- und Funktionssymbole in der Prädikatenlogik vorhanden sind.

## Vorbemerkung

Jede natürliche Kommunikation enthält den automatischen Übergang von der Bezeichnung zur Semantik. Selbstverständlich unterscheiden wir in der natürlichen Kommunikation nicht ständig das Wort „Auto“ von seiner Bedeutung „Auto$_S$“. Auch in der mathematischen Sprechweise werden wir im Normalfall den automatischen Übergang auf die Bedeutung eines Wortes unterstellen.

Wir verlassen damit die engen Beschränkungen des prädikatenlogischen Kalküls und unterstellen, eine mögliche Bezeichnungsweise innerhalb des Kalküls.
Insbesondere verwenden wir die in der Vorlesung genannten Abkürzungen der mathematischen Formelschreibweise.



Seien $f$ und $g$ Elemente von $F$, so dass $f(n) = 2$ und $g(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt $|f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)$? Geben Sie die Lösung als Menge $H$ von Paaren $(n, \epsilon)$ an.
2. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Für welche $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Formel?

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \, |f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n) \, . \qquad (1)$$



Seien $f$ und $g$ Elemente von $F$, so dass $f(n) = 2$ und $g(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt $|f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)$? Geben Sie die Lösung als Menge $H$ von Paaren $(n, \epsilon)$ an.

## Lösung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\begin{aligned} |f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n) &\iff 2 \leq \epsilon \cdot n \\ &\iff (n, \epsilon) \in \{(m, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid \tfrac{2}{c} \leq m\} \, . \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösungsmenge ist also
$H = \{(m, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid \frac{2}{c} \leq m\}$.



Seien $f$ und $g$ Elemente von $F$, so dass $f(n) = 2$ und $g(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

2. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Für welche $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Formel?

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \, |f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n) \, . \qquad (1)$$

## Lösung

Zunächst muss $(n_0, \epsilon)$ aus der Lösungsmenge $H$ sein, d.h. es muss gelten

$$\frac{2}{\epsilon} \leq n_0 \, .$$

Wir erhalten für alle $n \geq n_0$

$$2 \leq \epsilon \cdot n_0 \leq \epsilon \cdot n \, ,$$

und damit die Gültigkeit der Formel (1).

## 3.2 VA 2

Seien $M$ und $P$ prädikatenlogische Formeln. Wir verwenden häufig die abkürzenden Schreibweisen
$\forall x, M\colon P$ für $\forall x\ (M \to P)$ und
$\exists x, M\colon P$ für $\exists x\ (M \land P)$.

1. Beweisen Sie die entsprechenden DeMorgan'schen Gesetze
$\neg\forall x, M\colon P \;\equiv\; \exists x, M\colon \neg P$ bzw.
$\neg\exists x, M\colon P \;\equiv\; \forall x, M\colon \neg P$.
2. Wir betrachten eine Formel, die wir mit $o(f,g)$ bezeichnen wollen wie folgt:

$$o(f,g) \;=\; \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| \leq \epsilon{\cdot}g(n)\,.$$

Zeigen Sie

$$\neg o(f,g) \;\equiv\; \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+\colon \forall n_0 \in \mathbb{N}\colon \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| > \epsilon{\cdot}g(n)\,.$$



## 3.2 VA 2

Seien $M$ und $P$ prädikatenlogische Formeln. Wir verwenden häufig die abkürzenden Schreibweisen
$\forall x, M\colon P$ für $\forall x\ (M \to P)$ und
$\exists x, M\colon P$ für $\exists x\ (M \land P)$.

1. Beweisen Sie die entsprechenden DeMorgan'schen Gesetze
$\neg\forall x, M\colon P \;\equiv\; \exists x, M\colon \neg P$ bzw.
$\neg\exists x, M\colon P \;\equiv\; \forall x, M\colon \neg P$.
2. Wir betrachten eine Formel, die wir mit $o(f,g)$ bezeichnen wollen wie folgt:

$$o(f,g) \;=\; \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| \leq \epsilon{\cdot}g(n)\,.$$

Zeigen Sie

$$\neg o(f,g) \;\equiv\; \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+\colon \forall n_0 \in \mathbb{N}\colon \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| > \epsilon{\cdot}g(n)\,.$$



Abkürzenden Schreibweisen
$\forall x, M\colon P$ für $\forall x\ (M \to P)$ und
$\exists x, M\colon P$ für $\exists x\ (M \land P)$.

1. Beweisen Sie die entsprechenden DeMorgan'schen Gesetze
$\neg\forall x, M\colon P \;\equiv\; \exists x, M\colon \neg P$ bzw.
$\neg\exists x, M\colon P \;\equiv\; \forall x, M\colon \neg P$.

### Lösung

Wir schließen

$$\begin{aligned}
\neg\forall x, M\colon P \;&\equiv\; \neg\forall x\ (M \to P) && \text{(Def.)}\\
&\equiv\; \exists x\ \neg(M \to P) && \text{(DeMorgan)}\\
&\equiv\; \exists x\ \neg(\neg M \lor P) && \text{(Def.)}\\
&\equiv\; \exists x\ (M \land \neg P) && \text{(DeMorgan)}\\
&\equiv\; \exists x, M\colon \neg P && \text{(Def.)}
\end{aligned}$$



und

$$\begin{aligned}
\neg\exists x, M\colon P \;&\equiv\; \neg\exists x\ (M \land P) && \text{(Def.)}\\
&\equiv\; \forall x\ \neg(M \land P) && \text{(DeMorgan)}\\
&\equiv\; \forall x\ (\neg M \lor \neg P) && \text{(DeMorgan)}\\
&\equiv\; \forall x\ (M \to \neg P) && \text{(Def.)}\\
&\equiv\; \forall x, M\colon \neg P\,. && \text{(Def.)}
\end{aligned}$$

Abkürzenden Schreibweisen

$\forall x, M\colon P$ für $\forall x\ (M \to P)$ und

$\exists x, M\colon P$ für $\exists x\ (M \land P)$.

1. Beweisen Sie die entsprechenden DeMorgan'schen Gesetze
   $\neg\forall x, M\colon P \equiv \exists x, M\colon \neg P$ bzw.
   $\neg\exists x, M\colon P \equiv \forall x, M\colon \neg P$.

## Lösung

Wir schließen

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x, M\colon P &\equiv \neg\forall x\ (M \to P) && \text{(Def.)}\\
&\equiv \exists x\ \neg(M \to P) && \text{(DeMorgan)}\\
&\equiv \exists x\ \neg(\neg M \lor P) && \text{(Def.)}\\
&\equiv \exists x\ (M \land \neg P) && \text{(DeMorgan)}\\
&\equiv \exists x, M\colon \neg P && \text{(Def.)}
\end{aligned}
$$



und

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x, M\colon P &\equiv \neg\exists x\ (M \land P) && \text{(Def.)}\\
&\equiv \forall x\ \neg(M \land P) && \text{(DeMorgan)}\\
&\equiv \forall x\ (\neg M \lor \neg P) && \text{(DeMorgan)}\\
&\equiv \forall x\ (M \to \neg P) && \text{(Def.)}\\
&\equiv \forall x, M\colon \neg P\,. && \text{(Def.)}
\end{aligned}
$$



## Lösung

Man kann in der folgenden Berechnung gut verfolgen, wie das Negationszeichen durch die Formel wandert und dabei die Quantoren in ihr duales Gegenteil verkehrt.

$$
\begin{aligned}
&\neg o(f,g)\\
&\equiv\ \neg\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)\\
&\equiv\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \neg\exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)\\
&\equiv\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N}\colon \neg\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)\\
&\equiv\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N}\colon \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \neg\left(|f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)\right)\\
&\equiv\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N}\colon \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| > \epsilon \cdot g(n)\,.
\end{aligned}
$$



## Lösung

Man kann in der folgenden Berechnung gut verfolgen, wie das Negationszeichen durch die Formel wandert und dabei die Quantoren in ihr duales Gegenteil verkehrt.

$$
\begin{aligned}
&\neg o(f,g)\\
&\equiv\ \neg\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)\\
&\equiv\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \neg\exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)\\
&\equiv\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N}\colon \neg\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)\\
&\equiv\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N}\colon \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \neg\left(|f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)\right)\\
&\equiv\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N}\colon \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |f(n)| > \epsilon \cdot g(n)\,.
\end{aligned}
$$

## 3.3 VA 3

Im Folgenden bezeichnet 1 in $o(1)$ die konstante Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert 1 besitzt.

1. Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Wachstums $o(f(n))$:

$$\frac{1}{n+1} \in o(1)\,.$$

2. Man zeige: Für reellwertige Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1)\,.$$

Die Teilaufgabe 2 ist Spezialfall des Satzes im heutigen Thema.



## 3.3 VA 3

Im Folgenden bezeichnet 1 in $o(1)$ die konstante Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert 1 besitzt.

1. Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Wachstums $o(f(n))$:

$$\frac{1}{n+1} \in o(1)\,.$$

2. Man zeige: Für reellwertige Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1)\,.$$

Die Teilaufgabe 2 ist Spezialfall des Satzes im heutigen Thema.



### Lösung Teilaufg. 1

Sei $f(n) = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann haben wir zu zeigen

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_c \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c : \left|\frac{1}{n+1}\right| < c \cdot 1.$$

Wir erfüllen schrittweise den obigen prädikatenlogischen Ausdruck von „links nach rechts“ gemäß der Klammerung

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \left[\exists n_c \in \mathbb{N} : \left[\forall, \in \mathbb{N}, n \geq n_c : \left|\frac{1}{n+1}\right| < c \cdot 1\right]\right].$$



### Lösung Teilaufg. 1

Sei $f(n) = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann haben wir zu zeigen

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_c \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c : \left|\frac{1}{n+1}\right| < c \cdot 1.$$

Wir erfüllen schrittweise den obigen prädikatenlogischen Ausdruck von „links nach rechts“ gemäß der Klammerung

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \left[\exists n_c \in \mathbb{N} : \left[\forall, \in \mathbb{N}, n \geq n_c : \left|\frac{1}{n+1}\right| < c \cdot 1\right]\right].$$

Als Erstes nehmen wir ein beliebiges $c > 0$ an. Für dieses $c > 0$ ist Folgendes nachzuweisen.

$$\exists n_c \in \mathbb{N} : \left[ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c : \left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right] .$$

Den Existenzbeweis führen wir wieder konstruktiv. Wir konstruieren ein geeignetes $n_c$ wie folgt:

$$n_c := \left\lceil \frac{1}{c} \right\rceil + 17.$$



Nun müssen wir zeigen, dass gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c : \left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 .$$

Wir nehmen ein beliebiges $n$ mit $n \geq n_c$ an und haben zu zeigen:

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 .$$

Wegen $n \geq n_c = \lceil \frac{1}{c} \rceil + 17$ gilt $n > \frac{1}{c}$, mithin $\frac{1}{n} < c$.
Es folgt

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < c \cdot 1 .$$

W.z.b.w.



### 3.4 VA 4

Man zeige: $(\log n^2)^2 \in o(2^{\ln n})$ .

Lösung

Es ist zu zeigen:

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \; \exists n_c \in \mathbb{N} : \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c ; \; |(\log n^2)^2| < c \cdot 2^{\ln n} .$$

Sei $b$ eine beliebige zulässige Basis.

Wir lösen die Formel schrittweise auf.
Sei $c$ eine beliebige reelle Zahl mit $c > 0$. Nun konstruieren wir eine natürliche Zahl $n_c$, so dass gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c : \; (\log n^2)^2 < c \cdot 2^{\ln n} .$$



Umformung:

$$(\log_b n^2)^2 = \frac{4}{(\ln b)^2} \cdot (\ln n)^2 < c \cdot 2^{\ln n} .$$

Wir bezeichnen $\ln n$ mit $x$, d.h. wir setzen $x = \ln n$, und wir setzen $k = \frac{4}{(\ln b)^2}$.

Nun benutzen wir die Ungleichung $x^3 < 2^x$ für $x \geq 10$. Die Ungleichung folgt durch Logarithmieren bzw. Delogarithmieren aus $3 \ln x < x \ln 2$ für $x \geq 10$.

Dann gilt für $x \geq 10$, $x \geq k$ und $\frac{k}{x} \leq c$

$$k \cdot x^2 = \frac{k}{x} \cdot x^3 < c \cdot 2^x .$$

Nun setzen wir $x_0 = max\{10, k, \frac{k}{c}\}$ und $n_0 = \lceil e^{x_0} \rceil$ und erhalten für alle $n \geq n_0$ die gewünschte Ungleichung.

## 3.4 VA 4

Man zeige: $(\log n^2)^2 \in o(2^{\ln n})$ .

Lösung

Es ist zu zeigen:

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \; \exists n_c \in \mathbb{N} : \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c; \; |(\log n^2)^2| < c \cdot 2^{\ln n} .$$

Sei $b$ eine beliebige zulässige Basis.

Wir lösen die Formel schrittweise auf.
Sei $c$ eine beliebige reelle Zahl mit $c > 0$. Nun konstruieren wir eine natürliche Zahl $n_c$, so dass gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_c : \; (\log n^2)^2 < c \cdot 2^{\ln n} .$$