Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_DS_WS2014 (05.11.2014)

Date: Wed Nov 05 17:01:09 CET 2014

Duration: 77:33 min

Pages: 34

WS 2014/15

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Bungartz)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014WS/ds/uebung/

5. November 2014

ZÜ V

Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Fragen, Probleme?
2. Thema: Resolution und Herleitungskalkül
   Resolution
   Herleitungskalkül des natürlichen Schließens
3. Vorbereitung auf TA Blatt 5

1. Fragen, Anregungen?

Fragen?

Anregungen?

Ziel der Arbeitsblätter und Hin.Ti's!

2. Thema: Resolution und Herleitungskalkül

2.1 Resolution

Erinnerung: Eine konjunktive Normalform (KNF) eines aussagenlogischen Ausdrucks ist im Sinne der Vorlesung eine Konjunktion von Disjunktionen (Klauseln), d.h. eine Formel der Form

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j}\right) \quad \text{mit} \quad n, m_i \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und Literalen} \quad L_{i,j}\,.$$

Man beachte: Falls in einer Klausel gleichzeitig L_i und $\overline{L}_i$ vorkommen, dann ist die Klausel äquivalent zu true.
Diese Klausel kann aus der KNF entfernt werden. Sie ist sozusagen „trivial“.

2. Thema: Resolution und Herleitungskalkül

2.1 Resolution

Erinnerung: Eine konjunktive Normalform (KNF) eines aussagenlogischen Ausdrucks ist im Sinne der Vorlesung eine Konjunktion von Disjunktionen (Klauseln), d.h. eine Formel der Form

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j}\right) \quad \text{mit} \quad n, m_i \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und Literalen} \quad L_{i,j}\,.$$

Man beachte: Falls in einer Klausel gleichzeitig L_i und $\overline{L}_i$ vorkommen, dann ist die Klausel äquivalent zu true.
Diese Klausel kann aus der KNF entfernt werden. Sie ist sozusagen „trivial“.

Resolution als Herleitung

Sei F eine Formel, die als Disjunktion von Klauseln dargestellt sei.

Es seinen $R = K_1, K_2, \ldots, K_n$ eine Folge von Klauseln.

Dann heißt R eine Resolution der Klausel K_n für die Formel F, falls

jede Klausel K_i ein Resolvent zweier Klauseln K_j mit $j < i$
oder
Klausel aus F ist.

Resolution als Herleitung

Sei F eine Formel, die als Disjunktion von Klauseln dargestellt sei.

Es seinen $R = K_1, K_2, \ldots, K_n$ eine Folge von Klauseln.

Dann heißt R eine Resolution der Klausel K_n für die Formel F, falls

jede Klausel K_i ein Resolvent zweier Klauseln K_j mit $j < i$
oder
Klausel aus F ist.

Eine Resolution R heißt *terminierend*,

wenn die letzte Klausel der Sequenz R die leere Klausel ist oder

keine zwei Klauseln der Sequenz mit einer nicht trivialen Resolvente resolviert werden können, die nicht schon in der Resolution enthalten ist.

Eine Klausel heißt *trivial*,
wenn sie ein Literal L und gleichzeitig das komplementäre Literal $\neg L$ enthält.

2.2 Herleitungskalkül des natürlichen Schließens

Kalküle des natürlichen Schließens gehen auf Gerhard Gentzen zurück.

Diese Kalküle formalisieren jene Schlußweisen, mit denen man Beweise in der mathematischen Literatur verständlich führen kann.

Wir werden dies an einem Beispiel eines Beweises studieren, den wir zunächst in natürlicher Weise führen werden, um ihn dann in direkter Entsprechung im Kalkül nachzubilden.

2.2.1 Modus Tollens

Aufgabe:

Der „Modus Tollens“ (Schlussart der „Aufhebung“) bezeichnet eine logische Inferenz der Form

$$((F \to G) \land \neg G) \to \neg F\,.$$

Zeigen Sie die Korrektheit des Modus Tollens mit Hilfe des Herleitungskalküls des natürlichen Schließens gemäß Vorlesung.

Zu beweisen ist also:

$$\models\ ((F \to G) \land \neg G) \to \neg F\,.$$

mit Hilfe von

$$\vdash\ ((F \to G) \land \neg G) \to \neg F\,.$$

2.2.1 Modus Tollens

Aufgabe:

Der „Modus Tollens“ (Schlussart der „Aufhebung“) bezeichnet eine logische Inferenz der Form

$$((F \to G) \land \neg G) \to \neg F\,.$$

Zeigen Sie die Korrektheit des Modus Tollens mit Hilfe des Herleitungskalküls des natürlichen Schließens gemäß Vorlesung.

Zu beweisen ist also:

$$\models\ ((F \to G) \land \neg G) \to \neg F\,.$$

mit Hilfe von

$$\vdash\ ((F \to G) \land \neg G) \to \neg F\,.$$

F und G sind Formelvariable (Schemavariable), d. h. Platzhalter für aussagenlogische Formeln.

Ersetzt man beispielsweise F bzw. G jeweils durch aussagenlogische Variablen p bzw. q, dann erhält man die Formel

$$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$$

Bemerkung:
Diese Formel ist ein Beispiel einer logischen Inferenz, da wir alle Implikationen so nennen können.

Die Inferenz nennen wir korrekt genau dann, wenn die Implikation (allgemein-)gültig ist, und schreiben in diesem Fall

$$\models\ ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$$

Man beachte:

$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$ ist eine Formel, nämlich eine Implikation.

Aber

$\models\ ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$ ist das Urteil der Allgemeingültigkeit der Formel, in Worten $\neg p$ „folgt aus“ $(p \to q) \land \neg q$.

Die Korrektheit des Modus Tollens zu beweisen, heißt also, für alle Formeln F und G die folgende Aussage zu beweisen.

$$\models\ ((F \to G) \land \neg G) \to \neg F\,.$$

Dieser Beweis ist bereits dann erbracht (siehe Vorlesung für die Ersetzung von Formelvariablen durch Aussagenvariable), wenn Folgendes für die aussagenlogischen Variablen p und q gezeigt wird.

$$\models\ ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$$

Die Folgerungsbeziehung $\models$ begründet eine Relation zwischen aussagenlogischen Formeln. Sie steht in enger Beziehung zur Relation $\vdash$, die mit dem Herleitungskalkül definiert wird.

2.2.2 Herkömmlicher Beweis

Wir beweisen nun in herkömmlicher oder natürlicher Weise die Korrektheit der Inferenz

$$\models\ ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$$

Beweisidee:

Wir nehmen $(p \to q) \land \neg q$ an und beweisen, dass die Annahme p einen Widerspruch erzeugt.

$$\models ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$$

Beweis:

1. Wir nehmen an, dass $(p \to q) \land \neg q$ gilt.

   Kommentar: Nun führen wir die Annahme von p zum Widerspruch.
2. Wir nehmen also p an.
3. Es gilt nach (1) auch $(p \to q)$.
4. Damit folgt q.
5. Andererseits gilt wegen (1) auch $\neg q$.
6. Damit folgt $q \land \neg q$, d.h. ein Widerspruch.
7. Annahme (2) kann also verneint werden $\neg p$.
8. Es folgt die zu beweisende Implikation.

2.2.3 Beweis durch Herleitung

Lösung der ursprünglichen Aufgabe:

Wir beweisen nun die Korrektheit der obigen Inferenz formal mit Hilfe des Herleitungskalküls für die Relation $\vdash$, also

$$\vdash ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$$

Wir stellen die Herleitung in Form einer Tabelle dar, in der die Folge der Urteile mit Kommentaren aufgelistet wird.

Nr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$(p \to q) \land \neg q,\ p$	$\vdash$	$(p \to q) \land \neg q$	Annahmeregel
2.	$(p \to q) \land \neg q,\ p$	$\vdash$	p	Annahmeregel
3.	$(p \to q) \land \neg q,\ p$	$\vdash$	$(p \to q)$	1.+Konj.-Beseit.
4.	$(p \to q) \land \neg q,\ p$	$\vdash$	q	2.+3.+Impl.Beseit.
5.	$(p \to q) \land \neg q,\ p$	$\vdash$	$\neg q$	1.+Konj.-Beseit.
6.	$(p \to q) \land \neg q,\ p$	$\vdash$	false	5.+4.+false-Regel
7.	$(p \to q) \land \neg q$	$\vdash$	$\neg p$	6.+Neg.-Einf.
8.		$\vdash$	$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$	7.+Impl.-Einf.

Bemerkungen:

Man beachte, dass die linke Seite einer Inferenz $\mathcal{A} \vdash F$ stets eine Konjunktion von Formeln bedeutet. Diese Konjunktion wird zur Abkürzung häufig mit Komma geschrieben. Wie oben zu sehen ist, sind auch Mischungen möglich.

Wir haben damit gezeigt, dass die Inferenz $((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$ mit den Regeln des Herleitungskalküls hergeleitet werden kann. Da der Herleitungskalkül korrekt ist, folgt daraus $\models ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$

3. Vorbereitung auf TA Blatt 5

3.1 VA 1

Berechnen Sie jeweils eine, im Sinne von TA 1 terminierende Resolution der Formeln

1. $F_1 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.
2. $F_2 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r$.

1. $F_1 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

Lösung

Wir notieren die Resolutionsschritte der Reihe nach. Wir starten mit K_1, K_2, wobei $K_1 = p \vee q \vee r$, $K_2 = \neg p \vee \neg q \vee \neg r$ seien.

1. Mit RV p und K_1, K_2:
K_1, K_2: $R = q \vee r \vee \neg q \vee \neg r$. Keine neue Klausel, weil $R \equiv$ true!

2. Mit RV q und K_1, K_2:
K_1, K_2: $R = p \vee r \vee \neg p \vee \neg r$ keine neue Klausel, weil $R \equiv$ true!

3. Mit RV r und K_1, K_2: K_1, K_2: $R = p \vee q \vee \neg p \vee \neg q$ keine neue Klausel, weil $R \equiv$ true!

Ende des Resolutionsverfahrens, weil keine neue Resolvente gebildet werden kann.

Ausgabe: F_1 ist erfüllbar, weil die leere Klausel nicht hergeleitet werden konnte.

3. Vorbereitung auf TA Blatt 5

3.1 VA 1

Berechnen Sie jeweils eine, im Sinne von TA 1 terminierende Resolution der Formeln

1. $F_1 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.
2. $F_2 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r$.

ZÜ DS 3.1 VA 1

1. $F_1 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

Lösung

Wir notieren die Resolutionsschritte der Reihe nach. Wir starten mit K_1, K_2, wobei $K_1 = p \vee q \vee r$, $K_2 = \neg p \vee \neg q \vee \neg r$ seien.

1. Mit RV p und K_1, K_2:
K_1, K_2: $R = q \vee r \vee \neg q \vee \neg r$. Keine neue Klausel, weil $R \equiv$ true!

2. Mit RV q und K_1, K_2:
K_1, K_2: $R = p \vee r \vee \neg p \vee \neg r$ keine neue Klausel, weil $R \equiv$ true!

3. Mit RV r und K_1, K_2: K_1, K_2: $R = p \vee q \vee \neg p \vee \neg q$ keine neue Klausel, weil $R \equiv$ true!

Ende des Resolutionsverfahrens, weil keine neue Resolvente gebildet werden kann.

Ausgabe: F_1 ist erfüllbar, weil die leere Klausel nicht hergeleitet werden konnte.

ZÜ DS 3.1 VA 1

❷ $F_2 = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r$.

Lösung

Wir starten mit K_1, K_2, K_3, K_4, wobei $K_1 = p \vee q \vee r$, $K_2 = \neg p \vee q$, $K_3 = \neg q \vee r$, $K_4 = \neg r$ seien.

1. Mit RV p und K_1, K_2: K_1, K_2: $R = q \vee r$.
Neue Klausel $K_5 := q \vee r$.

2. Mit RV q und K_3, K_5: K_3, K_5: $R = r$.
Neue Klausel $K_6 = r$.

3. Mit RV r und K_4, K_6: K_4, K_6: $R =$ false.
Ende.

Ausgabe: F_2 ist unerfüllbar.

Bemerkung

Die Auswahl von Klauseln und Variablen bei der Resolvierung beeinflußt stark den Aufwand der Berechnung.

3.2 VA 2

Siehe Thema.

3.3 VA 3

Begründen Sie die folgende Implikation, die für den Herleitungskalkül der Aussagenlogik gilt. Seien $\mathcal{A}$ eine beliebige, endliche Menge von Aussagen, und F, G seien aussagenlogische Formeln. Dann gilt

$$\mathcal{A} \vdash F \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}, G \vdash F ,$$

d.h., wenn $\mathcal{A} \vdash F$ gilt, dann gilt auch $\mathcal{A}, G \vdash F$.

3.2 VA 2

Siehe Thema.

3.3 VA 3

Begründen Sie die folgende Implikation, die für den Herleitungskalkül der Aussagenlogik gilt. Seien $\mathcal{A}$ eine beliebige, endliche Menge von Aussagen, und F, G seien aussagenlogische Formeln. Dann gilt

$$\mathcal{A} \vdash F \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}, G \vdash F ,$$

d.h., wenn $\mathcal{A} \vdash F$ gilt, dann gilt auch $\mathcal{A}, G \vdash F$.

Lösung

Diese Implikation setzt sich aus den Aussagen $\mathcal{A} \vdash F$ als Prämisse und der Aussage $\mathcal{A}, G \vdash F$ als Konklusion zusammen. Nun verstehen wir die Implikation wie folgt:

Falls $\mathcal{A} \vdash F$ herleitbar ist, dann ist auch $\mathcal{A}, G \vdash F$ herleitbar.

Wir nehmen also an, dass $\mathcal{A} \vdash F$ herleitbar ist d. h. insbesondere, dass
$\mathcal{A}_1 \vdash F_1, \mathcal{A}_2 \vdash F_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash F_n$,
eine endliche Sequenz von Inferenzen ist mit den Eigenschaften

- $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ und $F_n = F$.
- Für alle i mit $1 \leq i \leq n$ kann der Ausdruck $\mathcal{A}_i \vdash F_i$ aus einer Teilmenge der Inferenzen $\mathcal{A}_1 \vdash F_1, \mathcal{A}_2 \vdash F_2, \ldots, \mathcal{A}_{i-1} \vdash F_{i-1}$ durch Anwendung einer Regel des Herleitungskalküls gewonnen werden.

Zur Erinnerung

Es gibt
1. die Annahmeregel,
2. Regel für true,
3. Regel für false,
4. Konjunktionseinführung,
5. Konjunktionsbeseitigung,
6. Disjunktionseinführung,
7. Disjunktionsbeseitigung,
8. Negationseinführung,
9. Negationsbeseitigung,
10. Implikationseinführung,
11. Implikationsbeseitigung,
12. Regel des ausgeschlossenen Dritten.

Alle diese Regeln gelten für beliebige Annahmemengen $\mathcal{A}$. Es können also die Annahmemengen stets durch eine beliebige Formel G vergrößert werden, ohne die Anwendbarkeit der Regel zu verletzen.

Daraus folgt, dass
$\mathcal{A}_1 \cup \{G\} \vdash F_1, \mathcal{A}_2 \cup \{G\} \vdash F_2, \ldots, \mathcal{A}_n \cup \{G\} \vdash F_n$ eine Herleitung von $\mathcal{A} \cup \{G\} \vdash F$ ist.

Bemerkung: VA 2 liefert ein Beispiel einer Herleitung. Eine Herleitung wird meist als Tabelle geschrieben werden.
Aus der Tabelle kann man die hergeleiteten Elemente der Relation $\vdash$ ablesen.

3.4 VA 4

Seien a, b, c bzw. x, y, z bzw. P, Q Konstanten bzw. Variablen bzw. 2-stellige Prädikate aus dem Vokabular der prädikatenlogischen Syntax. Gegeben sei die Struktur $S = (U, I)$ mit $U = \{1, 2, 3\}$, $I(a) = a_S = 2$, $I(y) = y_S = 1$ und $I(P) = P_S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$. Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x\ (P(x, y) \rightarrow \exists y\ Q(x, y)).$$

3.4 VA 4

Seien a, b, c bzw. x, y, z bzw. P, Q Konstanten bzw. Variablen bzw. 2-stellige Prädikate aus dem Vokabular der prädikatenlogischen Syntax. Gegeben sei die Struktur $S = (U, I)$ mit $U = \{1, 2, 3\}$, $I(a) = a_S = 2$, $I(y) = y_S = 1$ und $I(P) = P_S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$. Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x\ (P(x, y) \rightarrow \exists y\ Q(x, y)).$$

1. Geben Sie für jedes Vorkommen einer Variablen in F seinen Gültigkeitsbereich an.
2. Entscheiden Sie, welche Vorkommen frei bzw. gebunden sind. Ist F eine geschlossene Formel?
3. Begründen Sie, warum die Struktur S nicht zur Formel F passt!
4. Geben Sie eine möglichst minimale Erweiterung S' der Struktur S an, so dass S' zu F passt und F wahr macht, d. h. $[F](S') = 1$.