Script generated by TTT

Title: Info2 (23.10.2015)

Date: Fri Oct 23 08:37:19 CEST 2015

Duration: 77:47 min

Pages: 47

Idee für das Beispiel

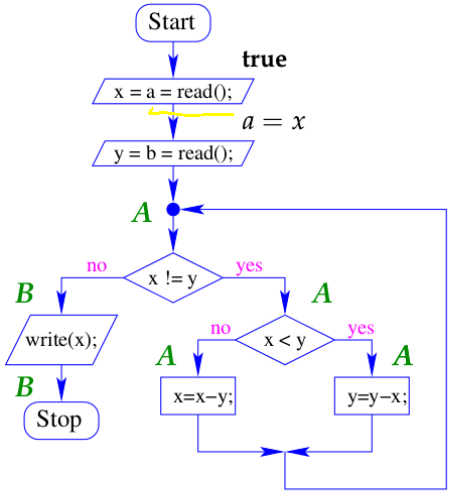
- Am Anfang gilt nix.
- Nach `a=read(); x=a;` gilt $a = x$.
- Vor Betreten und während der Schleife soll gelten:

$$A \quad \equiv \quad ggT(a,b) = ggT(x,y)$$

- Am Programm-Ende soll gelten:

$$B \quad \equiv \quad A \wedge x = y$$

Unser Beispiel



Idee für das Beispiel

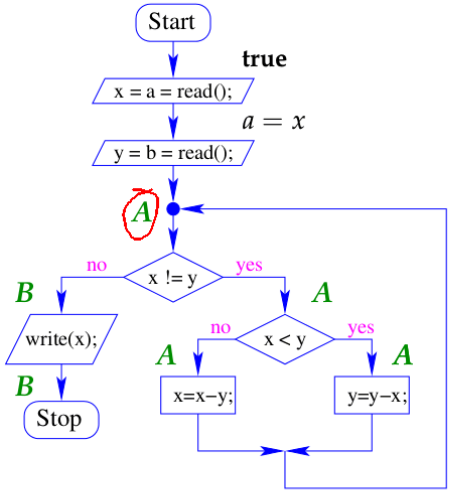
- Am Anfang gilt nix.
- Nach `a=read(); x=a;` gilt $a = x$.
- Vor Betreten und während der Schleife soll gelten:

$$A \quad \equiv \quad ggT(a,b) = ggT(x,y)$$

- Am Programm-Ende soll gelten:

$$B \quad \equiv \quad A \wedge x = y$$

Unser Beispiel



Idee für das Beispiel

- Am Anfang gilt nix.
- Nach `a=read(); x=a;` gilt $a = x$.
- Vor Betreten und während der Schleife soll gelten:

$$A \quad \equiv \quad ggT(a,b) = ggT(x,y)$$

- Am Programm-Ende soll gelten:

$$B \quad \equiv \quad A \wedge x = y$$

$$\begin{aligned} ggT(x,0) &= |x| \\ ggT(x,x) &= |x| \\ ggT(x,y) &= ggT(x,y-x) \\ ggT(x,y) &= ggT(x-y,y) \end{aligned}$$

Idee für das Beispiel

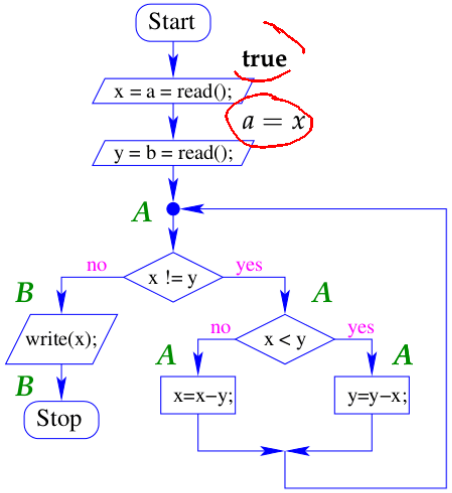
- Am Anfang gilt nix.
- Nach `a=read(); x=a;` gilt $a = x$.
- Vor Betreten und während der Schleife soll gelten:

$$A \quad \equiv \quad ggT(a,b) = ggT(x,y)$$

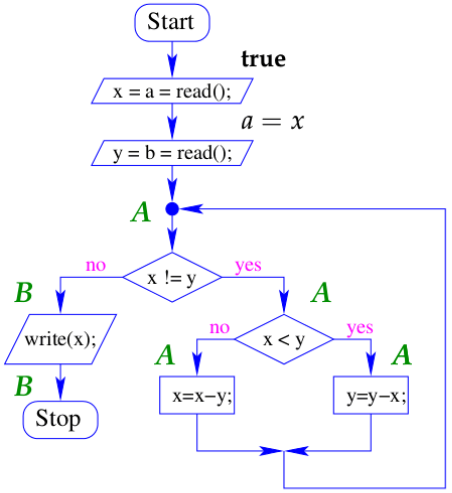
- Am Programm-Ende soll gelten:

$$B \quad \equiv \quad A \wedge x = y$$

Unser Beispiel



Unser Beispiel



24

Frage

Wie beweisen wir, dass Zusicherungen lokal zusammen passen?

Teilproblem 1: Zuweisungen

Betrachte z.B. die Zuweisung: `x = y+z;`

Damit nach der Zuweisung gilt: $x > 0$, // Nachbedingung

muss vor der Zuweisung gelten: $y + z > 0$. // Vorbedingung

Allgemeines Prinzip

- Jede Anweisung transformiert eine Nachbedingung B in eine minimale Anforderung, die vor Ausführung erfüllt sein muss, damit B nach der Ausführung gilt.

Allgemeines Prinzip

- Jede Anweisung transformiert eine Nachbedingung B in eine minimale Anforderung, die vor Ausführung erfüllt sein muss, damit B nach der Ausführung gilt.
- Im Falle einer Zuweisung `x = e;` ist diese schwächste Vorbedingung (engl.: weakest precondition) gegeben durch

$$\mathbf{WP}[\![\texttt{x = e;}]\!]\ (B) \quad \equiv \quad B[e/x]$$

Das heißt: wir substituieren einfach in B überall x durch e !!!

Allgemeines Prinzip

- Jede Anweisung transformiert eine Nachbedingung B in eine minimale Anforderung, die vor Ausführung erfüllt sein muss, damit B nach der Ausführung gilt.
- Im Falle einer Zuweisung `x = e;` ist diese schwächste Vorbedingung (engl.: weakest precondition) gegeben durch

$$\mathbf{WP}[\![\texttt{x = e;}]\!]\ (B) \quad \equiv \quad B[e/x]$$

Das heißt: wir substituieren einfach in B überall x durch e !!!

- Eine beliebige Vorbedingung A für eine Anweisung s ist gültig, sofern

$$A \Rightarrow \mathbf{WP}[\![s]\!]\ (B)$$

// A impliziert die schwächste Vorbedingung für B.

Beispiel

Zuweisung:	`x = x-y;`
Nachbedingung:	$x > 0$
schwächste Vorbedingung:	$x - y > 0$
stärkere Vorbedingung:	$x - y > 2$
noch stärkere Vorbedingung:	$x - y = 3$

... im GGT-Programm (1):

Zuweisung:	`x = x-y;`
Nachbedingung:	A
schwächste Vorbedingung:	

$$\begin{aligned} A[x-y/x] &\equiv ggT(a,b) = ggT(x-y,y) \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y) \\ &\equiv A \end{aligned}$$

Beispiel

Zuweisung:	`x = x-y;`
Nachbedingung:	$x > 0$
schwächste Vorbedingung:	$x - y > 0$
stärkere Vorbedingung:	$x - y > 2$
noch stärkere Vorbedingung:	$x - y = 3$

... im GGT-Programm (1):

Zuweisung:	`x = x-y;`
Nachbedingung:	A
schwächste Vorbedingung:	

$$\begin{aligned} A[x-y/x] &\equiv ggT(a,b) = ggT(x-y,y) \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y) \\ &\equiv A \end{aligned}$$

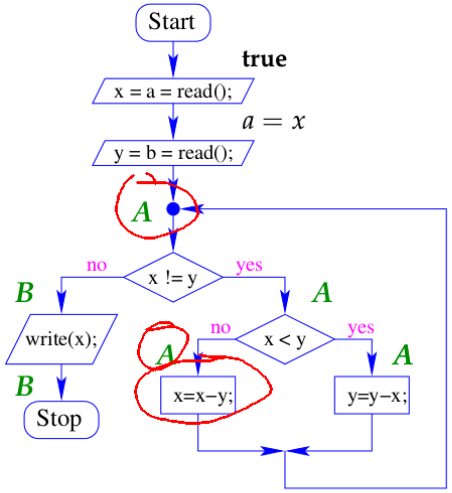
$$\begin{aligned} ggT(x,0) &= |x| \\ ggT(x,x) &= |x| \\ ggT(x,y) &= ggT(x,y-x) \\ ggT(x,y) &= ggT(x-y,y) \end{aligned}$$

... im GGT-Programm (1):

Zuweisung:	`x = x-y;`
Nachbedingung:	A
schwächste Vorbedingung:	

$$\begin{aligned} A[x-y/x] &\equiv ggT(a,b) = ggT(x-y,y) \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y) \\ &\equiv A \end{aligned}$$

Unser Beispiel



... im GGT-Programm (1):

Zuweisung: `x = x-y;`

Nachbedingung: A

schwächste Vorbedingung:

$$\begin{aligned} A[x-y/x] &\equiv ggT(a,b) = ggT(x-y,y) \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y) \\ &\equiv A \end{aligned}$$

... im GGT-Programm (2):

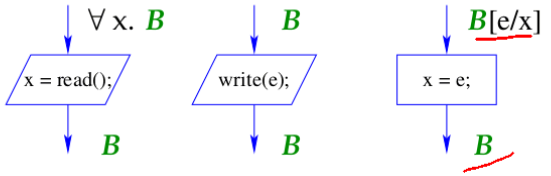
Zuweisung: `y = y-x;`

Nachbedingung: A

schwächste Vorbedingung:

$$\begin{aligned} A[y-x/y] &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y-x) \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y) \\ &\equiv A \end{aligned}$$

Zusammenstellung:

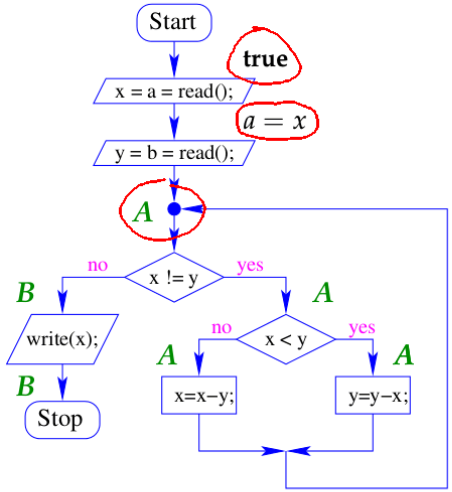


$$\begin{aligned} \mathbf{WP}[\![\texttt{;}]\!](B) &\equiv B \\ \mathbf{WP}[\![\texttt{x = e;}]\!](B) &\equiv B[e/x] \\ \mathbf{WP}[\![\texttt{x = read();}]\!](B) &\equiv \forall x.\, B \\ \mathbf{WP}[\![\texttt{write(e);}]\!](B) &\equiv B \end{aligned}$$

Diskussion

- Die Zusammenstellung liefert für alle Aktionen jeweils die schwächsten Vorbedingungen für eine Nachbedingung B.
- Eine Ausgabe-Anweisung ändert keine Variablen. Deshalb ist da die schwächste Vorbedingung B selbst.
- Eine Eingabe-Anweisung `x=read();` ändert die Variable `x` auf unvorhersehbare Weise.
- Damit nach der Eingabe B gelten kann muss B vor der Eingabe für jedes mögliche `x` gelten.

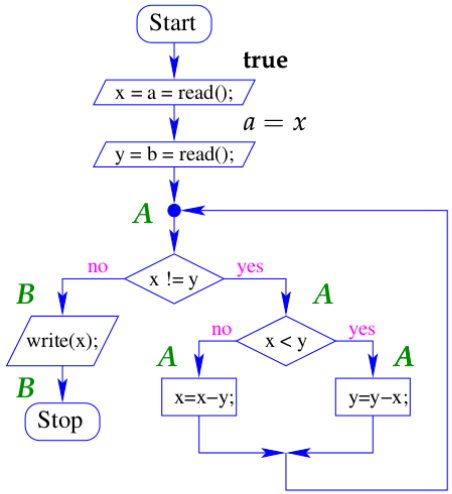
Orientierung



Für die Anweisungen: `b = read(); y = b;` berechnen wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{WP}[\![\texttt{y = b;}]\!]\,(A) &\equiv A[b/y] \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,b) \end{aligned}$$

Orientierung



Für die Anweisungen: `b = read(); y = b;` berechnen wir:

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{y = b;}]\!]\,(A) &\equiv A[b/y] \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,b)\end{aligned}$$

Für die Anweisungen: `b = read(); y = b;` berechnen wir:

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{y = b;}]\!]\,(A) &\equiv A[b/y] \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{b = read();}]\!]\,(ggT(a,b) = ggT(x,b)) &\equiv \forall b.\, ggT(a,b) = ggT(x,b) \\ &\Leftarrow a = x\end{aligned}$$

Für die Anweisungen: `a = read(); x = a;` berechnen wir:

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{x = a;}]\!]\,(a = x) &\equiv a = a \\ &\equiv \mathbf{true}\end{aligned}$$

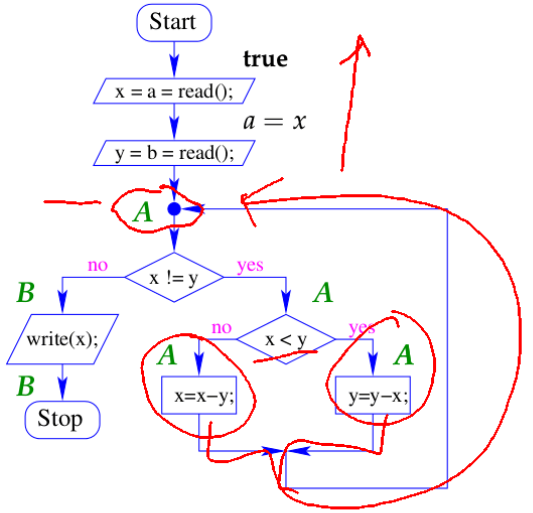
$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{a = read();}]\!]\,(\mathbf{true}) &\equiv \forall a.\, \mathbf{true} \\ &\equiv \mathbf{true}\end{aligned}$$

Für die Anweisungen: `b = read(); y = b;` berechnen wir:

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{y = b;}]\!]\,(A) &\equiv A[b/y] \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{b = read();}]\!]\,(ggT(a,b) = ggT(x,b)) &\equiv \forall b.\, ggT(a,b) = ggT(x,b) \\ &\Leftarrow a = x\end{aligned}$$

Orientierung

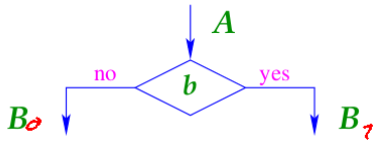


Für die Anweisungen: `a = read(); x = a;` berechnen wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{WP}[\![\texttt{x = a;}]\!]\ (a = x) &\equiv a = a \\ &\equiv \mathbf{true} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{WP}[\![\texttt{a = read();}]\!]\ (\mathbf{true}) &\equiv \forall a.\ \mathbf{true} \\ &\equiv \mathbf{true} \end{aligned}$$

Teilproblem 2: Verzweigungen



Es sollte gelten:

- $A \wedge \neg b \Rightarrow B_0$ und
- $A \wedge b \Rightarrow B_1$.

Das ist der Fall, falls A die schwächste Vorbedingung der Verzweigung:

$$\mathbf{WP}[\![b]\!]\ (B_0, B_1) \equiv ((\neg b) \Rightarrow B_0) \wedge (b \Rightarrow B_1)$$

impliziert.

Das ist der Fall, falls A die schwächste Vorbedingung der Verzweigung:

$$\mathbf{WP}[\![b]\!]\ (B_0, B_1) \ \equiv\ ((\neg b) \Rightarrow B_0)\ \wedge\ (b \Rightarrow B_1)$$

impliziert.

Das ist der Fall, falls A die schwächste Vorbedingung der Verzweigung:

$$\mathbf{WP}[\![b]\!]\ (B_0, B_1) \ \equiv\ ((\neg b) \Rightarrow B_0)\ \wedge\ (b \Rightarrow B_1)$$

impliziert.

Die schwächste Vorbedingung können wir umschreiben in:

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![b]\!]\ (B_0, B_1) &\equiv (b \vee B_0) \wedge (\neg b \vee B_1)\\ &\equiv (\neg b \wedge B_0) \vee (b \wedge B_1) \vee (B_0 \wedge B_1)\\ &\equiv (\neg b \wedge B_0) \vee (b \wedge B_1)\end{aligned}$$

Beispiel

$$B_0 \equiv x > y \wedge y > 0 \qquad B_1 \equiv y > x \wedge x > 0$$

Sei b die Bedingung $y > x$.

Dann ist die schwächste Vorbedingung:

Beispiel

$$B_0 \equiv x > y \wedge y > 0 \qquad B_1 \equiv y > x \wedge x > 0$$

Sei b die Bedingung $y > x$.

Dann ist die schwächste Vorbedingung:

$$\begin{aligned}&(x > y \wedge y > 0) \vee (y > x \wedge x > 0)\\ \equiv\ &x > 0 \wedge y > 0 \wedge x \neq y\end{aligned}$$

... im GGT-Beispiel

$$
\begin{aligned}
b &\equiv y > x \\
\neg b \wedge A &\equiv x \geq y \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y) \\
b \wedge A &\equiv y > x \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y)
\end{aligned}
$$

... im GGT-Beispiel

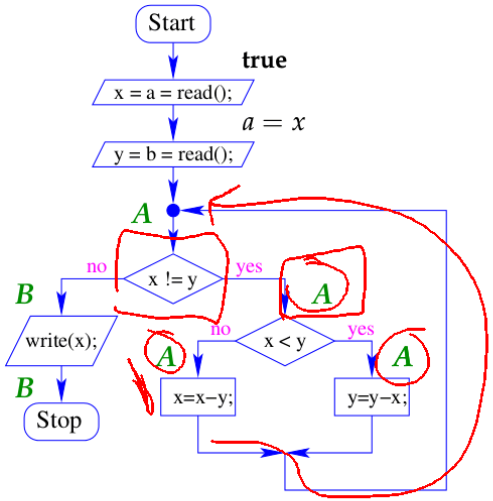
$$
\begin{aligned}
b &\equiv y > x \\
\neg b \wedge A &\equiv x \geq y \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y) \\
b \wedge A &\equiv y > x \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Die schwächste Vorbedingung ist:

$$ggT(a,b) = ggT(x,y)$$

... also genau A

Orientierung

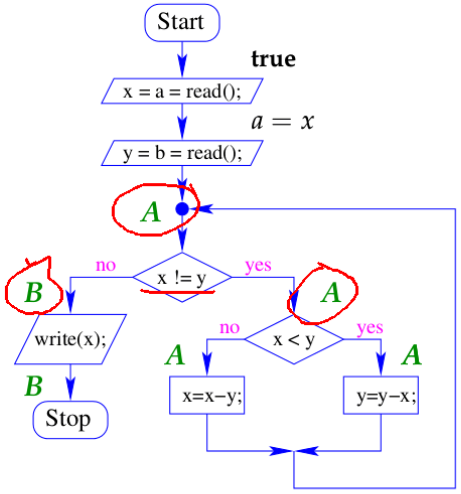


Analog argumentieren wir für die Zusicherung vor der Schleife:

$$
\begin{aligned}
b &\equiv y \neq x \\
\neg b \wedge B &\equiv B \\
b \wedge A &\equiv A \wedge x \neq y
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ $A \equiv (A \wedge x = y) \vee (A \wedge x \neq y)$ ist die schwächste Vorbedingung für die Verzweigung.

Orientierung



Analog argumentieren wir für die Zusicherung vor der Schleife:

$$b \equiv y \neq x$$

$$\neg b \wedge B \equiv B$$
$$b \wedge A \equiv A \wedge x \neq y$$

$\Longrightarrow$ $A \equiv (A \wedge x = y) \vee (A \wedge x \neq y)$ ist die schwächste Vorbedingung für die Verzweigung.

Zusammenfassung der Methode

- Annotiere jeden Programmpunkt mit einer Zusicherung.
- Überprüfe für jede Anweisung s zwischen zwei Zusicherungen A und B, dass A die schwächste Vorbedingung von s für B impliziert, d.h.:

$$A \Rightarrow \mathbf{WP}[\![s]\!](B)$$

- Überprüfe entsprechend für jede Verzweigung mit Bedingung b, ob die Zusicherung A vor der Verzweigung die schwächste Vorbedingung für die Nachbedingungen B_0 und B_1 der Verzweigung impliziert, d.h.

$$A \Rightarrow \mathbf{WP}[\![b]\!]\ (B_0, B_1)$$

Solche Annotierungen nennen wir lokal konsistent.

Zusammenfassung der Methode

- Annotiere jeden Programmpunkt mit einer Zusicherung.
- Überprüfe für jede Anweisung s zwischen zwei Zusicherungen A und B, dass A die schwächste Vorbedingung von s für B impliziert, d.h.:

$$A \Rightarrow \mathbf{WP}[\![s]\!](B)$$

- Überprüfe entsprechend für jede Verzweigung mit Bedingung b, ob die Zusicherung A vor der Verzweigung die schwächste Vorbedingung für die Nachbedingungen B_0 und B_1 der Verzweigung impliziert, d.h.

$$A \Rightarrow \mathbf{WP}[\![b]\!]\ (B_0, B_1)$$

Solche Annotierungen nennen wir lokal konsistent.

48