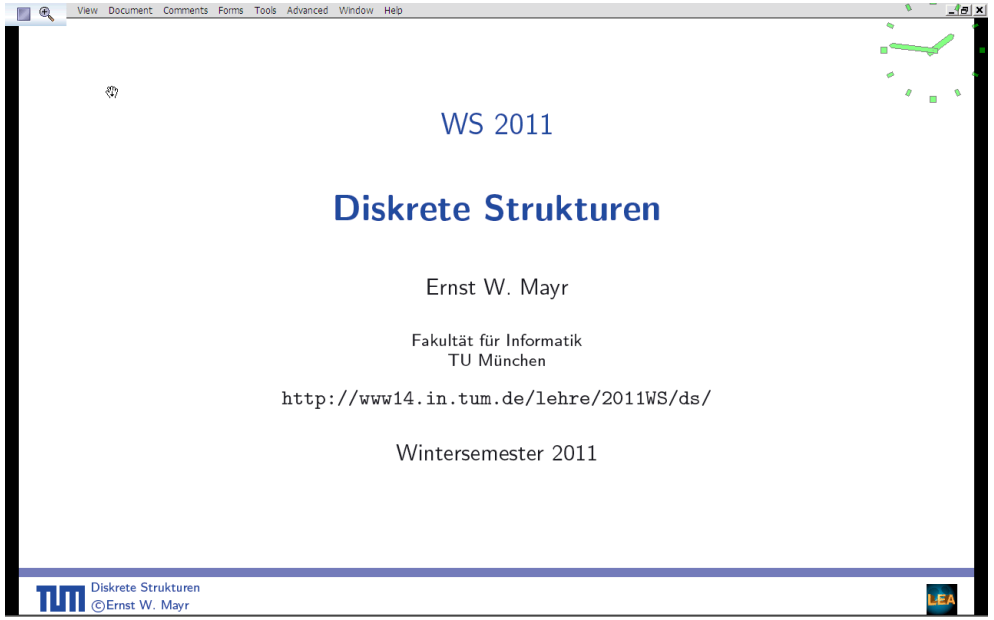
Script **generated by TTT**

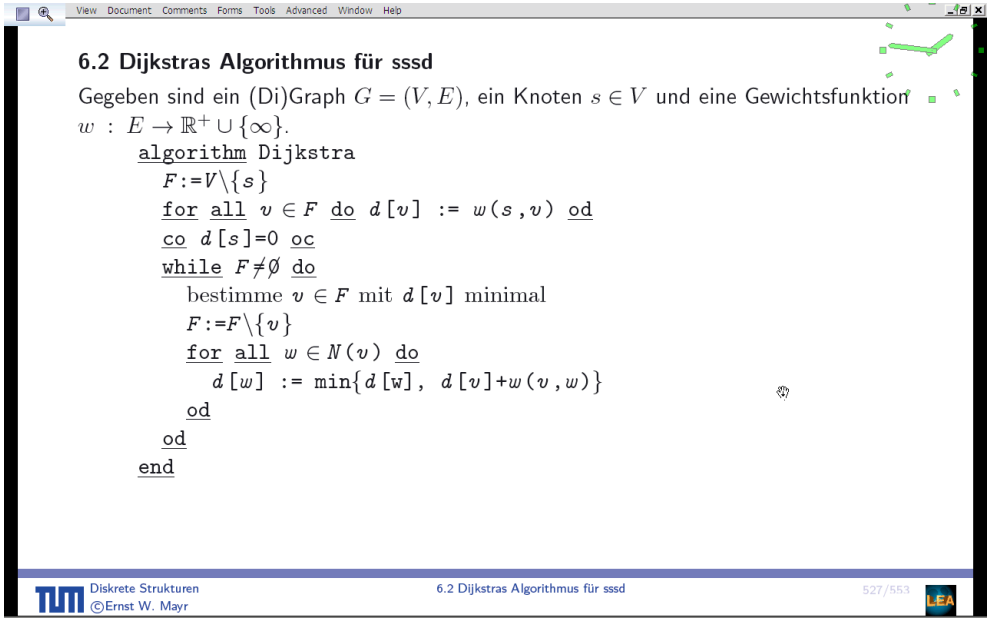
Title: Mayr: 2011 ds (07.02.2012)

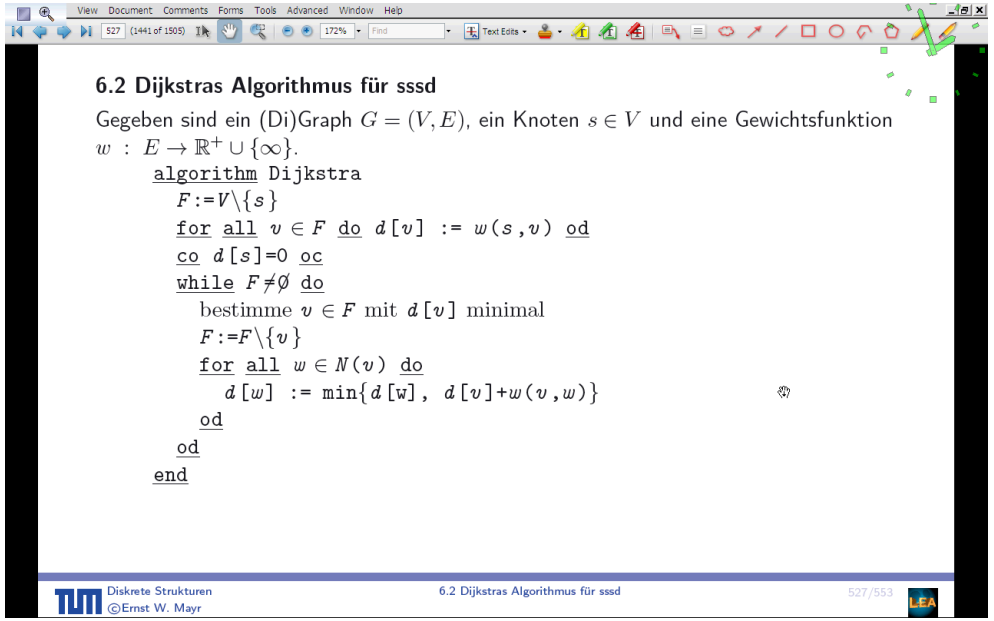
Date: Tue Feb 07 13:46:12 CET 2012

Duration: 90:04 min

Pages: 36







6.2 Dijkstras Algorithmus für sssd

Gegeben sind ein (Di)Graph $G = (V, E)$, ein Knoten $s \in V$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

```
algorithm Dijkstra
  F:=V\{s}
  for all v ∈ F do d[v] := w(s,v) od
  co d[s]=0 oc
  while F≠∅ do
    bestimme v ∈ F mit d[v] minimal
    F:=F\{v}
    for all w ∈ N(v) do
      d[w] := min{d[w], d[v]+w(v,w)}
    od
  od
end
```

6.2 Dijkstras Algorithmus für sssd

Gegeben sind ein (Di)Graph $G = (V, E)$, ein Knoten $s \in V$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

```
algorithm Dijkstra
  F:=V\{s}
  for all v ∈ F do d[v] := w(s,v) od
  co d[s]=0 oc
  while F≠∅ do
    bestimme v ∈ F mit d[v] minimal
    F:=F\{v}
    for all w ∈ N(v) do
      d[w] := min{d[w], d[v]+w(v,w)}
    od
  od
end
```

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 6.2 Dijkstras Algorithmus für sssd 527/553

Satz 316

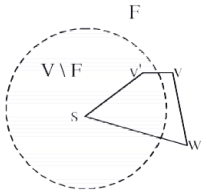
Dijkstras Algorithmus berechnet $\mathrm{d}(s, v)$ für alle $v \in V$; der Zeitaufwand ist $O(n^2)$, der Platzbedarf $O(n + m)$.

Beweis:
Zeit- und Platzbedarf sind aus dem Algorithmus ersichtlich. Die Korrektheit zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis.

Annahme: v sei der erste Knoten, so dass $\mathrm{d}(s, v)$ falsch (d. h. zu groß) berechnet wird. —

Beweis (Forts.):

Diese Situation illustriert folgendes Bild:



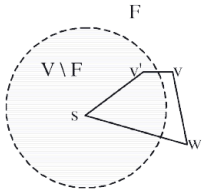
Nach Annahme muss dann gelten:

$$\mathrm{d}(w) + w(w, v) < \mathrm{d}(s, v') + w(v', v) = \mathrm{d}(v) .$$

Damit wäre $\mathrm{d}(w)$ aber kleiner als $\mathrm{d}(v)$, und der Algorithmus hätte w und nicht v gewählt. □

Beweis (Forts.):

Diese Situation illustriert folgendes Bild:



Nach Annahme muss dann gelten:

$$\mathrm{d}(w) + w(w,v) < \mathrm{d}(s,v') + w(v',v) = \mathrm{d}(v)\ .$$

Damit wäre $\mathrm{d}(w)$ aber kleiner als $\mathrm{d}(v)$, und der Algorithmus hätte w und nicht v gewählt. □

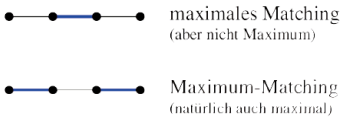
Bemerkung:
Mit besseren Datenstrukturen (priority queues – z. B. Fibonacci heaps) kann Dijkstras Algorithmus so implementiert werden, dass er z. B. in Zeit $O(m + n \cdot \log n)$ läuft.

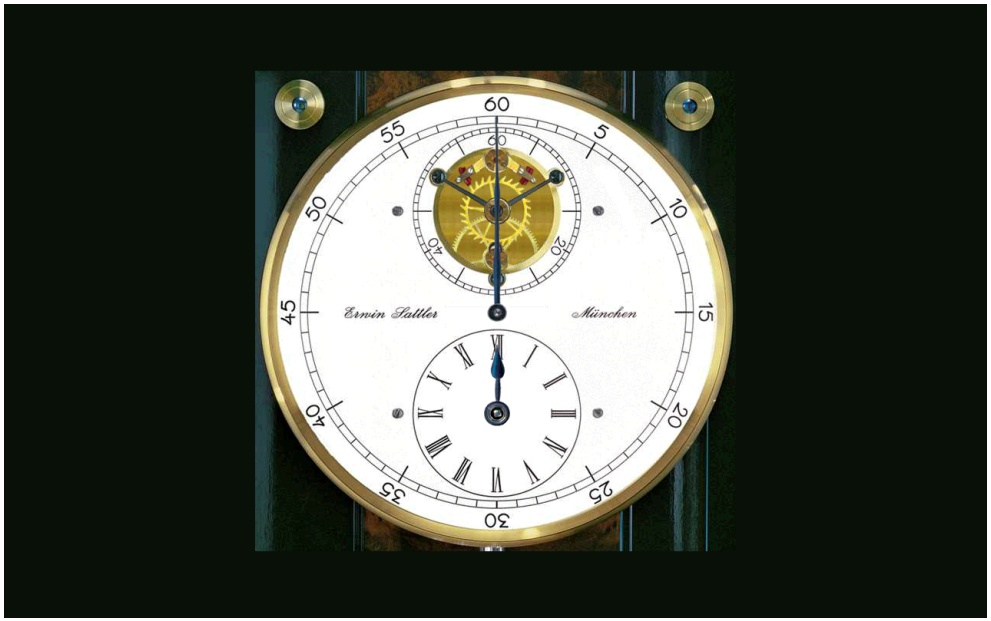
7. Matchings

Definition 317
Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

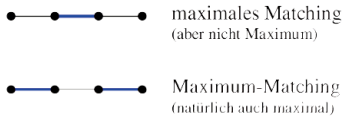
1. $M \subseteq E$ heißt Matching, falls alle Kanten in M paarweise disjunkt sind.
2. M heißt maximales Matching, falls es kein Matching M' in G gibt mit $M \subsetneq M'$.
3. M heißt Matching maximaler Kardinalität (aka Maximum Matching), falls es in G kein Matching M' mit $|M'| > |M|$ gibt.
4. $\mathrm{m}(G)$ ist die Kardinalität eines Maximum Matchings in G.

Beispiel 318





Beispiel 318



maximales Matching
(aber nicht Maximum)

Maximum-Matching
(natürlich auch maximal)

7.1 Matchings in bipartiten Graphen

Satz 319 („Heiratssatz“)

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann ist $\mathrm{m}(G) = |U|$ genau dann, wenn gilt:

$$(\forall A \subseteq U)\big[|A| \leq |N(A)|\big]$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Offensichtlich.

„$\Leftarrow$“

Sei M ein Maximum Matching in G.
Annahme: Ein Knoten $u = u_0 \in U$ sei in M *ungematcht*.

Wir beginnen in u_0 eine BFS, wobei wir in den ungeraden Schichten (also von U aus) nur ungematchte und in den geraden Schichten (also von V aus) nur gematchte Kanten verwenden. Querkanten bleiben außer Betracht.

Fall 1: Die BFS findet in V einen ungematchten Knoten v. Dann stoppen wir.

Fall 2: Nach Vollendung einer geraden Schicht (mit gematchten Kanten) sind alle Blätter des BFS-Baums gematcht. Seien U' (bzw. V') die Knoten des aktuellen BFS-Baums in U (bzw. V). Gemäß Annahme ist $|U'| > |V'|$, die alternierende BFS kann also fortgesetzt werden. Da G endlich ist, muss schließlich Fall 1 eintreten.

„⇐“

Sei M ein Maximum Matching in G.
Annahme: Ein Knoten $u = u_0 \in U$ sei in M *ungematcht*.

Wir beginnen in u_0 eine BFS, wobei wir in den ungeraden Schichten (also von U aus) nur ungematchte und in den geraden Schichten (also von V aus) nur gematchte Kanten verwenden. Querkanten bleiben außer Betracht.

Fall 1: Die BFS findet in V einen ungematchten Knoten v. Dann stoppen wir.

Fall 2: Nach Vollendung einer geraden Schicht (mit gematchten Kanten) sind alle Blätter des BFS-Baums gematcht. Seien U' (bzw. V') die Knoten des aktuellen BFS-Baums in U (bzw. V). Gemäß Annahme ist $|U'| > |V'|$, die alternierende BFS kann also fortgesetzt werden. Da G endlich ist, muss schließlich Fall 1 eintreten.

„⇐“

Sei M ein Maximum Matching in G.
Annahme: Ein Knoten $u = u_0 \in U$ sei in M *ungematcht*.

Wir beginnen in u_0 eine BFS, wobei wir in den ungeraden Schichten (also von U aus) nur ungematchte und in den geraden Schichten (also von V aus) nur gematchte Kanten verwenden. Querkanten bleiben außer Betracht.

Fall 1: Die BFS findet in V einen ungematchten Knoten v. Dann stoppen wir.

Fall 2: Nach Vollendung einer geraden Schicht (mit gematchten Kanten) sind alle Blätter des BFS-Baums gematcht. Seien U' (bzw. V') die Knoten des aktuellen BFS-Baums in U (bzw. V). Gemäß Annahme ist $|U'| > |V'|$, die alternierende BFS kann also fortgesetzt werden. Da G endlich ist, muss schließlich Fall 1 eintreten.

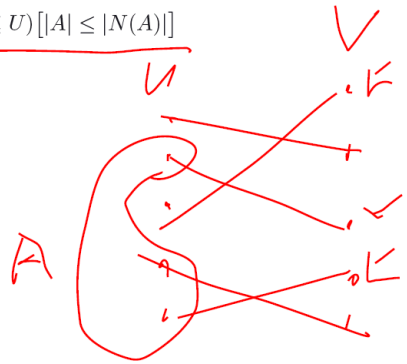
Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr
534/553

7.1 Matchings in bipartiten Graphen

Satz 319 („Heiratssatz“)

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann ist $\mathrm{m}(G) = |U|$ genau dann, wenn gilt:

$$(\forall A \subseteq U)\big[|A| \leq |N(A)|\big]$$



Beweis:

„⇒“

Offensichtlich.

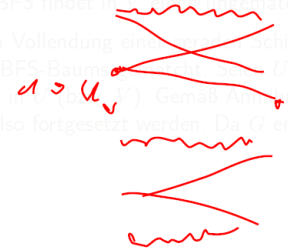
„⇐“

Sei M ein Maximum Matching in G.
Annahme: Ein Knoten $u = u_0 \in U$ sei in M *ungematcht*.

Wir beginnen in u_0 eine BFS, wobei wir in den ungeraden Schichten (also von U aus) nur ungematchte und in den geraden Schichten (also von V aus) nur gematchte Kanten verwenden. Querkanten bleiben außer Betracht.

Fall 1: Die BFS findet in V einen ungematchten Knoten v. Dann stoppen wir.

Fall 2: Nach Vollendung einer geraden Schicht (mit gematchten Kanten) sind alle Blätter des BFS-Baums gematcht. Seien U' (bzw. V') die Knoten des aktuellen BFS-Baums in U (bzw. V). Gemäß Annahme ist $|U'| > |V'|$, die alternierende BFS kann also fortgesetzt werden. Da G endlich ist, muss schließlich Fall 1 eintreten.



Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr
534/553

„⇐“

Sei M ein Maximum Matching in G.
Annahme: Ein Knoten $u = u_0 \in U$ sei in M *ungematcht*.

Wir beginnen in u_0 eine BFS, wobei wir in den ungeraden Schichten (also von U aus) nur ungematchte und in den geraden Schichten (also von V aus) nur gematchte Kanten verwenden. Querkanten bleiben außer Betracht.

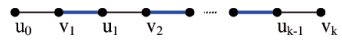
Fall 1: Die BFS findet in V einen ungematchten Knoten v. Dann stoppen wir.

Fall 2: Nach Vollendung einer geraden Schicht (mit gematchten Kanten) sind alle Blätter des BFS-Baums gematcht. Seien U' (bzw. V') die Knoten des aktuellen BFS-Baums in U (bzw. V). Gemäß Annahme ist $|U'| > |V'|$, die alternierende BFS kann also fortgesetzt werden. Da G endlich ist, muss schließlich Fall 1 eintreten.

Beweis (Forts.):

„⇐“(Fortsetzung)

Also existiert per Konstruktion ein Pfad wie in folgender Abbildung:

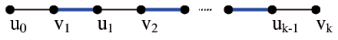


Ein solcher Pfad, bei dem sich gematchte und ungematchte Kanten abwechseln, heißt alternierender Pfad. Sind, wie hier, Anfangs- und Endknoten ungematcht, heißt der Pfad auch augmentierend.
Vertauscht man auf diesem Pfad gematchte und ungematchte Kanten, erhält man dadurch ein Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, was wiederum einen Widerspruch darstellt:

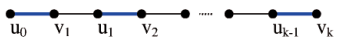
Beweis (Forts.):

„⇐“(Fortsetzung)

Also existiert per Konstruktion ein Pfad wie in folgender Abbildung:



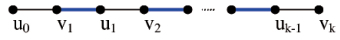
Ein solcher Pfad, bei dem sich gematchte und ungematchte Kanten abwechseln, heißt alternierender Pfad. Sind, wie hier, Anfangs- und Endknoten ungematcht, heißt der Pfad auch augmentierend.
Vertauscht man auf diesem Pfad gematchte und ungematchte Kanten, erhält man dadurch ein Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, was wiederum einen Widerspruch darstellt:



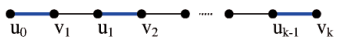
Beweis (Forts.):

„⇐“(Fortsetzung)

Also existiert per Konstruktion ein Pfad wie in folgender Abbildung:



Ein solcher Pfad, bei dem sich gematchte und ungematchte Kanten abwechseln, heißt alternierender Pfad. Sind, wie hier, Anfangs- und Endknoten ungematcht, heißt der Pfad auch augmentierend.
Vertauscht man auf diesem Pfad gematchte und ungematchte Kanten, erhält man dadurch ein Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, was wiederum einen Widerspruch darstellt:



Definition 320

Man definiert für einen bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ die Kenngröße:

$$\delta := \delta(G) := \max_{A \subseteq U}\{|A| - |N(A)|\}$$

Da bei der Maximumsbildung auch $A = \emptyset$ sein kann, ist $\delta \geq 0$.

Satz 321

Es gilt:

$$\mathrm{m}(G) = |U| - \delta\,.$$

Beweis:

Dass $\mathrm{m}(G) \leq |U| - \delta$ gilt, ist offensichtlich. Wir zeigen nun noch, dass auch $\mathrm{m}(G) \geq |U| - \delta$ gilt, damit ist der Satz bewiesen.

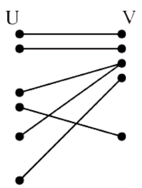
Betrachte folgenden Graphen:

Man fügt nun δ neue Knoten hinzu. Von diesen gehen Kanten zu allen Knoten in U, so dass ein $K_{|V|,\delta}$ entsteht.

Beweis:

Dass $\mathrm{m}(G) \leq |U| - \delta$ gilt, ist offensichtlich. Wir zeigen nun noch, dass auch $\mathrm{m}(G) \geq |U| - \delta$ gilt, damit ist der Satz bewiesen.

Betrachte folgenden Graphen:



Man fügt nun δ neue Knoten hinzu. Von diesen gehen Kanten zu allen Knoten in U, so dass ein $K_{|V|,\delta}$ entsteht.

Beweis (Forts.):

Der neue Graph erfüllt die Voraussetzungen des Heiratssatzes. Damit gibt es im neuen Graphen ein Matching M' mit $|M'| = |U|$. Daraus folgt, dass es im alten Graphen ein Matching der Kardinalität $\geq |U| - \delta$ geben muss. □

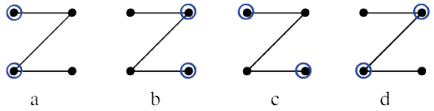
Definition 322
$D \subseteq U \uplus V$ heißt Träger oder Knotenüberdeckung (*vertex cover, VC*) von G, wenn jede Kante in G zu mindestens einem $u \in D$ inzident ist.

Beispiel 323

In den Fällen a, b und d sind Träger gezeigt, in c nicht.

Definition 322
$D \subseteq U \uplus V$ heißt Träger oder Knotenüberdeckung (*vertex cover, VC*) von G, wenn jede Kante in G zu mindestens einem $u \in D$ inzident ist.

Beispiel 323



In den Fällen a, b und d sind Träger gezeigt, in c nicht.

Satz 324
Es gilt:

$$\max\{|M|; M \text{ Matching}\} = \min\{|D|; D \text{ Träger}\}$$

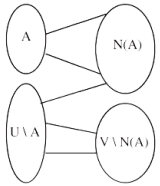
Satz 324
Es gilt:

$$\max\{|M|; M \text{ Matching}\} = \min\{|D|; D \text{ Träger}\}$$

Beweis:

„$\leq$“ Offensichtlich.

„$\geq$“ Für ein geeignetes $A \subseteq U$ gilt $\mathrm{m}(G) = |U| - \delta(G) = |U \setminus A| + |N(A)|$:



$(U \setminus A) \cup N(A)$ ist Träger von G.

□

Sei

$$M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

eine (quadratische) Matrix mit $m_{ij} \geq 0$. Alle Zeilen- und Spaltensummen von M seien gleich $r > 0$.

Man ordnet nun M den bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ zu mit

$$U = \{u_1, \ldots, u_n\}, V = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ und } \{u_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow m_{ij} > 0.$$

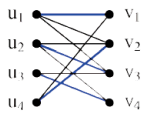
Ein Matching in G entspricht einer Menge von Positionen in M, die alle in verschiedenen Zeilen und Spalten liegen.

Beispiel 325

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & \boxed{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht dem Graphen

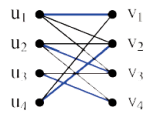


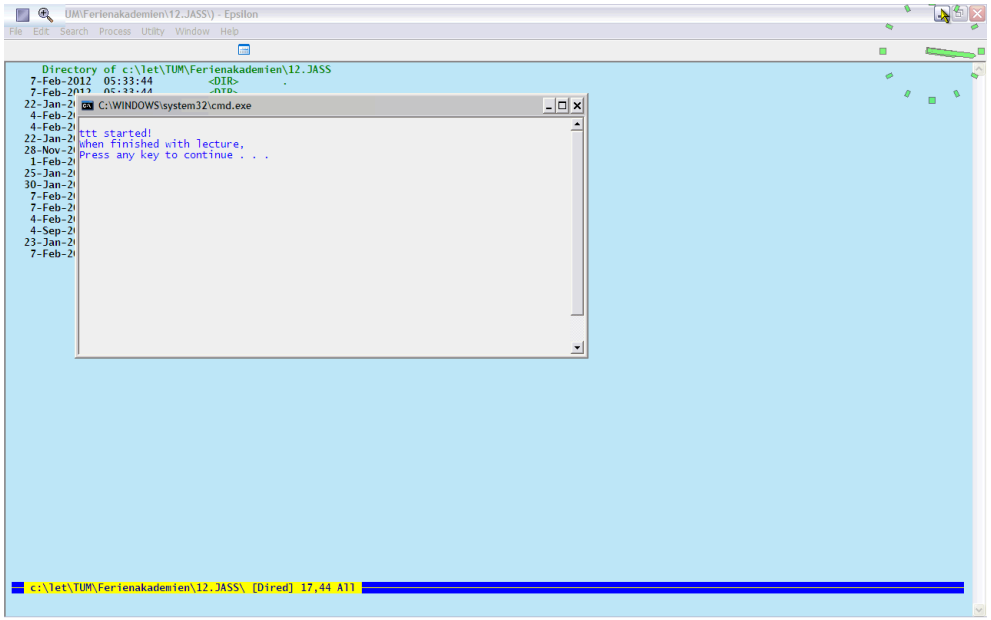
Beispiel 325

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & \boxed{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht dem Graphen




UM\Ferienakademien\12.JASS\) - Epsilon
File Edit Search Process Utility Window Help
Directory of c:\let\TUM\Ferienakademien\12.JASS
7-Feb-2012 05:33:44 <DIR> .
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
ttt started!
When finished with lecture,
Press any key to continue . . .
c:\let\TUM\Ferienakademien\12.JASS\ [Dired] 17,44 All