Script generated by TTT

Title: Mayr: 2011 ds (12.01.2012)

Date: Thu Jan 12 10:17:08 CET 2012

Duration: 89:33 min

Pages: 36

Inhaltsverzeichnis

Lemma 213 (Newton-Darstellung von Polynomen)

Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \cdot x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \binom{x}{k} .$$

Bemerkung: Die Newton-Darstellung entspricht offensichtlich der Taylorreihenentwicklung im differenzierbaren Fall.

Beweis:

$f(x)$ kann als Polynom vom Grad n eindeutig in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^{\underline{k}}$$

geschrieben werden ($x^{\underline{k}}$ ist Basis!). Damit ist nach Lemma 203 (1)

$$\Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot k^{\underline{i}} \cdot x^{\underline{k-i}} .$$

Also gilt, dass

$$\Delta^i f(0) = b_i \cdot i! \quad \text{bzw.} \quad b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!} .$$

Beweis:

$f(x)$ kann als Polynom vom Grad n eindeutig in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^{\underline{k}}$$

geschrieben werden ($x^{\underline{k}}$ ist Basis!). Damit ist nach Lemma 203 (1)

$$\Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot k^{\underline{i}} \cdot x^{\underline{k-i}} \,.$$

Also gilt, dass

$$\Delta^i f(0) = b_i \cdot i! \quad \text{bzw.} \quad b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \,.$$

Beispiel 214

Wir haben in Beispiel 210 gesehen, dass

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} \cdot x^{\underline{i}} \,.$$

Beispiel 214

Wir haben in Beispiel 210 gesehen, dass

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} \cdot x^{\underline{i}} \,.$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} k! \cdot S_{n,k} &= \Delta^k x^n\big|_{x=0} = (E - I)^k x^n\big|_{x=0} \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i\Big) x^n\big|_{x=0} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \,, \end{aligned}$$

und damit auch

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n \,.$$

4.9 Inversion

4.9.1 Basisfolgen

Definition 215

Eine Folge $(p_0(x), p_1(x), \ldots)$ von Polynomen $p_i(x)$ heißt Basisfolge, falls

$$\deg(p_i) = i \qquad \text{für alle } i.$$

Bemerkung: $p_0 \neq 0$, da wir für $p(x) \equiv 0$ festlegen: $\deg(p) = -1$.

Beobachtung: $(p_i(x))_{i\geq 0}$ sei eine Basisfolge. Dann kann jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n eindeutig dargestellt werden als

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot p_i(x)$$

mit $f_i \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Mit Koeffizientenvergleich und vollständiger Induktion. □

4.9.2 Zusammenhangskoeffizienten

Seien $(p_i(x))_{i\geq 0}$ und $(q_i(x))_{i\geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten Zusammenhangskoeffizienten), so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Lemma 216
Seien die $a_{n,k}, b_{n,k}$ wie oben, $A = (a_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ und $B = (b_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$, dann ist

$$AB = I$$

(I ist die $n+1$-dimensionale Einheitsmatrix.)

Beweis:
Klar. □

4.9.2 Zusammenhangskoeffizienten

Seien $(p_i(x))_{i\geq 0}$ und $(q_i(x))_{i\geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten Zusammenhangskoeffizienten), so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1. $$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot p_k(x)$$

2. $$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot q_k(x)$$

Lemma 216

Seien die $a_{n,k}, b_{n,k}$ wie oben, $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ und $B = (b_{ij})_{0 \le i,j \le n}$, dann ist

$$AB = I$$

(I ist die $n+1$-dimensionale Einheitsmatrix.)

Beweis:
Klar. □

Satz 217

Seien $a_{n,k}$ und $b_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, die zu zwei Basisfolgen gehörenden Zusammenhangskoeffizienten. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot u_k\right] \text{ gdw } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot v_k\right]$$

Beweis:
In Matrixschreibweise gilt:

$$v = (v_0, \ldots, v_n)^T = A \cdot u \text{ und } u = B \cdot v$$

Klar, da $A = B^{-1}$. □

4.9.3 Die Binomialinversion

Der Binomialsatz ergibt:

$$x^n = ((x-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (x-1)^k$$

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

Betrachte die beiden Basisfolgen

$(v_k)_{k\ge 0} := (x^k)_{k \ge 0}$ und $(u_k)_{k \ge 0} := ((x-1)^k)_{k \ge 0}$.

Satz 217 liefert:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u_k\right] \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot v_k\right]$$

Für „Puristen": Ersetze u_n durch $(-1)^n \cdot u_n$. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot u_k\right] \text{ und}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot v_k\right]$$

Betrachte die beiden Basisfolgen

$(v_k)_{k\geq 0} := (x^k)_{k\geq 0}$ und $(u_k)_{k\geq 0} := ((x-1)^k)_{k\geq 0}$.

Satz 217 liefert:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot u_k\right] \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\cdot v_k\right]$$

Für „Puristen“: Ersetze u_n durch $(-1)^n \cdot u_n$. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot u_k\right] \text{ und}$$
$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot v_k\right]$$

Beispiel 218

Sei $d(n,k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n,0)\ .$$

(Die Anzahl der sog. derangements).

Beispiel 218

Sei $d(n,k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n,0)\ .$$

(Die Anzahl der sog. derangements).

$$n! = \sum_{k=0}^{n} d(n,k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k} \overset{k\mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$$

Beispiel (Forts.)

Mit der Binomialinversion gilt:

$$D_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot\binom{n}{k}\cdot k!$$

Beispiel (Forts.)

Mit der Binomialinversion gilt:

$$
\begin{aligned}
D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \frac{n^{\underline{k}}}{n!} \right) \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e}\,.$$

4.9.4 Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n\geq 0}$ und $(x^{\underline{n}})_{n\geq 0}$. Wie wir bereits gesehen haben, gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k$$

Daraus lässt sich die Stirling-Inversion ableiten:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot u_k \right] \text{ gdw } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$

4.9.4 Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n\geq 0}$ und $(x^{\underline{n}})_{n\geq 0}$. Wie wir bereits gesehen haben, gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k$$

Daraus lässt sich die Stirling-Inversion ableiten:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot u_k \right] \text{ gdw } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.9 Inversion 364/384

4.9.4 Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n\geq 0}$ und $(x^{\underline{n}})_{n\geq 0}$. Wie wir bereits gesehen haben, gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} \qquad a_{n,k}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k$$

$b_{n,k}$

Daraus lässt sich die Stirling-Inversion ableiten:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot u_k \right] \text{ gdw } (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.9 Inversion 364/384

4.10 Erzeugende Funktionen

Definition 219

Zu einer Folge $(a_i)_{i\geq 0}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige (gewöhnliche) erzeugende Funktion die formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^i \,.$$

Beobachtungen: Die formalen Potenzreihen bilden einen Ring:

$$A(z) \pm B(z) = \sum_{i\geq 0} (a_i \pm b_i) z^i$$

$$c \cdot A(z) = \sum_{i\geq 0} (c \cdot a_i) z^i$$

Hier gilt folgende Produktformel:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n$$

(Konvolution von $A(z)$ und $B(z)$)

Satz 220

Eine formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$$

besitzt ein multiplikatives Inverses genau dann, wenn $a_0 \neq 0$.

Beweis:
Annahme: Sei

$$B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n \cdot z^n$$

ein solches Inverses. Dann muss $A(z) \cdot B(z) = 1$ sein, also auch $a_0 \cdot b_0 = 1$, damit $a_0 \neq 0$. Daher muss $b_0 = {a_0}^{-1}$ sein.

Beweis (Forts.):

Seien induktiv $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ bereits bestimmt. Dann folgt aus

$$[z^n]\Big(A(z) \cdot B(z)\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = 0, n \geq 1$$

(dabei bezeichnet $[z^n](\ldots)$ den Koeffizienten von z^n in $(\ldots)$) folgende Formel:

$$b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Also ist b_n und damit per Induktion $B(z)$ eindeutig bestimmt. $\square$

Beispiel 221

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$$

Es gilt $A(z) \cdot (1 - z) = 1$, da

$$\begin{aligned} A(z) \cdot (1 - z) &= A(z) - z \cdot A(z) \\ &= (1 + z + z^2 \ldots) - (z + z^2 + z^3 + \ldots) = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$A(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Satz 222

Einige wichtige Erzeugendenfunktionen:

1. $$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

2. $$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1 + z}$$

3. $$\sum_{n \geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1 - z^2}$$

4. $$\sum_{n \geq 0} \binom{a}{n} z^n = (1 + z)^a, \quad a \in \mathbb{C}$$

5. $$\sum_{n \geq 0} \binom{c + n - 1}{n} z^n = \frac{1}{(1 - z)^c} = (1 - z)^{-c}$$

6. $$\sum_{n \geq 0} \binom{m + n}{n} z^n = \frac{1}{(1 - z)^{m+1}}$$

7. $$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

8. $$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \ln(1 + z)$$

Beweis:

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}z^n &= \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-1)^n z^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-z)^n\\ &\overset{(4)}{=} (1-z)^{-c}\end{aligned}$$
6. Setze in (5) $c := m+1$.

□

Beispiel 223

Sei

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n, m \in \mathbb{N}_0\ .$$

Dann ist

$$z^m \cdot A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^{n+m} = \sum_{n\geq m} a_{n-m} \cdot z^n\ .$$

Beispiel (Forts.)

Damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} &\overset{\text{Folie }371(6)}{=} z^m \cdot \sum_{n\geq 0}\binom{m+n}{n}\cdot z^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{m+n}{n}z^{m+n} = \sum_{n\geq m}\binom{n}{n-m}z^n\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n\geq 0}\binom{n}{n-m}\cdot z^n\ .\end{aligned}$$

(∗) *Das Gleichheitszeichen gilt, da für $n < m$*

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

ist.

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

Beispiel 224

$$\begin{aligned}a_0 &= 2\\ a_n &= 2\cdot a_{n-1} + 2^n \qquad \text{für alle } n \geq 1\end{aligned}$$

lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$\begin{aligned}a_n &= 2\cdot a_{n-1} + 2^n\\ a_{n-1} &= 2\cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad \mid \cdot(-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n - 2\cdot a_{n-1} &= 2\cdot a_{n-1} - 4\cdot a_{n-2} + 2^n - 2\cdot 2^{n-1}\\ \Rightarrow 0 &= a_n - 4\cdot a_{n-1} + 4\cdot a_{n-2}\end{aligned}$$

lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

376 (1146 of 1173) 172% Find Text Edits

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

Beispiel 224

$$a_0 = 2$$
$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \qquad \text{für alle } n \geq 1$$

lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n$$
$$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2)$$

$$a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1}$$
$$\Rightarrow 0 = a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$$

lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung