

Script generated by TTT

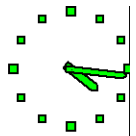
Title: Meixner: test2 (03.05.2013)

Date: Fri May 03 16:16:06 CEST 2013

Duration: 90:14 min

Pages: 31

SS 2013



Zentralübung

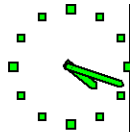
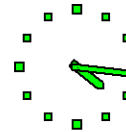
Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/>

3. Mai 2013



ZÜ III

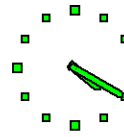
Übersicht:

1. Fragen zum Übungsbetrieb
2. Tipps zu HA Blatt 3
3. Thema: Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen
4. Erwartungswert und Varianz: Fortsetzung von ZÜ 2

1. Fragen zum Übungsbetrieb

Fragen?

Vorschläge?



2. Tipps zu HA Blatt 3

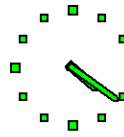
Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 3.1:

- 1 Bestimmen Sie zunächst die Wertemengen W_X und W_Y .

Vergleichen Sie die im Hinweis für b) gegebene Formel für den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ mit der Definition des Erwartungswerts, die sich bekanntlich auf die Dichte f_X von X bezieht.

Warum gilt die angegebenen Formel?



2. Tipps zu HA Blatt 3

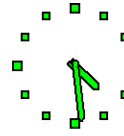
Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 3.1:

- 1 Bestimmen Sie zunächst die Wertemengen W_X und W_Y .

Vergleichen Sie die im Hinweis für b) gegebene Formel für den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ mit der Definition des Erwartungswerts, die sich bekanntlich auf die Dichte f_X von X bezieht.

Warum gilt die angegebenen Formel?



2. Tipps zu HA Blatt 3

Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 3.1:

- 1 Bestimmen Sie zunächst die Wertemengen W_X und W_Y .

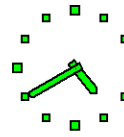
Vergleichen Sie die im Hinweis für b) gegebene Formel für den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ mit der Definition des Erwartungswerts, die sich bekanntlich auf die Dichte f_X von X bezieht.

Warum gilt die angegebenen Formel?





Der in HA 3.1(b) behandelte Minimierungssachverhalt ist fundamental wichtig!



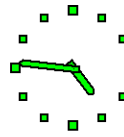
- 1 $\mathbb{E}[D^2]$ kann als eine reellwertige Funktion von den Parametern p_1, p_2 aufgefasst werden. Insbesondere ist $\mathbb{E}[D^2]$ eine Summe von gewichteten Quadraten.

Eine Minimierung einer Summe von Quadraten in Abhängigkeit eines Parameters $p_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $p_2 \in \mathbb{R}$ kann bequem mit bekannten Techniken der Analysis angegangen werden, zumindest bei der Herleitung einer notwendigen Bedingung.

Die Intuition sollte sein, dass p ein „Mittelwert“ sein wird.



Der in HA 3.1(b) behandelte Minimierungssachverhalt ist fundamental wichtig!



- 2 $\mathbb{E}[D^2]$ kann als eine reellwertige Funktion von den Parametern p_1, p_2 aufgefasst werden. Insbesondere ist $\mathbb{E}[D^2]$ eine Summe von gewichteten Quadraten.

Eine Minimierung einer Summe von Quadraten in Abhängigkeit eines Parameters $p_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $p_2 \in \mathbb{R}$ kann bequem mit bekannten Techniken der Analysis angegangen werden, zumindest bei der Herleitung einer notwendigen Bedingung.

Die Intuition sollte sein, dass p ein „Mittelwert“ sein wird.

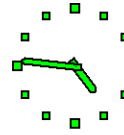


ad HA 3.2:

Eine Paarung definiert eine Partition der Menge der Spieler in 2-elementige Klassen. Zu Beginn einer neuen Runde wird also eine Partition der noch verbliebenen Spieler ausgewählt.

Für die Rechnung spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge die einzelnen Partien innerhalb einer Runde gespielt werden.

Das Ergebnis einer Runde ist eine Teilmenge von Spielern, die nur mehr die Hälfte der Spieler zu Beginn einer Runde enthält.

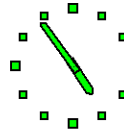


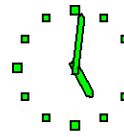
ad HA 3.2:

Eine Paarung definiert eine Partition der Menge der Spieler in 2-elementige Klassen. Zu Beginn einer neuen Runde wird also eine Partition der noch verbliebenen Spieler ausgewählt.

Für die Rechnung spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge die einzelnen Partien innerhalb einer Runde gespielt werden.

Das Ergebnis einer Runde ist eine Teilmenge von Spielern, die nur mehr die Hälfte der Spieler zu Beginn einer Runde enthält.

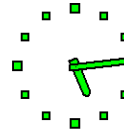




- 1 Versuchen Sie zunächst, die Lösungen intuitiv zu bestimmen.

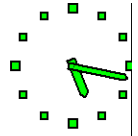
Zeichnen Sie nun einen Baum, der alle Spielsituationen wiedergibt.

Im Fall $n = 2$ gibt es nur zwei Runden, d.h., dass in der 2-ten Runde bereits der Sieger ermittelt wird. Die Blätter des Baumes sind dann einelementige Mengen.



- 2 Bestimmen Sie die W'keit des Ereignisses,
 - dass Spieler 1 in der 1-ten Runde auf Spieler 2 trifft.
 - dass Spieler 2 die erste Runde gewinnt, d.h. in die nächste Runde kommt.
 - dass Spieler 1 in der k -ten Runde auf Spieler 2 trifft.

Benutzen Sie Fallunterscheidungen für disjunkte Ereignisse bzw. Eigenschaften für Spielerzusammensetzungen in den Runden.



3. Thema: Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen

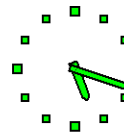
3.1 Definitionen nach Vorlesung

Die paarweise verschiedenen Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen **unabhängig**, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \quad (1)$$

Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n heißen **unabhängig**, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n]. \quad (2)$$



3. Thema: Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen

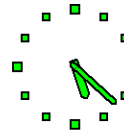
3.1 Definitionen nach Vorlesung

Die paarweise verschiedenen Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen **unabhängig**, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \quad (1)$$

Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n heißen **unabhängig**, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n]. \quad (2)$$



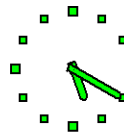
Achtung:

- Falls für paarweise verschiedene Ereignisse A_1, \dots, A_n die folgende Gleichung gilt

$$\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n], \quad (3)$$

dann gilt **nicht notwendigerweise** auch für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ die Gleichung

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \quad (4)$$



3. Thema: Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen

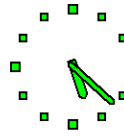
3.1 Definitionen nach Vorlesung

Die paarweise verschiedenen Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen **unabhängig**, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \quad (1)$$

Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n heißen **unabhängig**, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n]. \quad (2)$$



Achtung:

- Falls für paarweise verschiedene Ereignisse A_1, \dots, A_n die folgende Gleichung gilt

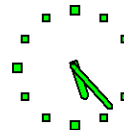
$$\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n], \quad (3)$$

dann gilt **nicht notwendigerweise** auch für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ die Gleichung

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \quad (4)$$



Aber:



- ② Falls n Zufallsvariable X_1, \dots, X_n unabhängig sind, dann sind für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ die Variablen X_{i_1}, \dots, X_{i_k} unabhängig, d. h. es gelten für alle $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in W_{X_{i_1}} \times \dots \times W_{X_{i_k}}$ die Gleichungen

$$\Pr[X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_k} = x_{i_k}] = \Pr[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[X_{i_k} = x_{i_k}].$$

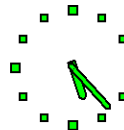
Insbesondere sind dann für beliebige x_1, \dots, x_n die Ereignisse

$$A_1 = (,X_1 = x_1\text{"}), \dots, A_n = (,X_n = x_n\text{"})$$

unabhängig.



Aber:



- ② Falls n Zufallsvariable X_1, \dots, X_n unabhängig sind, dann sind für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ die Variablen X_{i_1}, \dots, X_{i_k} unabhängig, d. h. es gelten für alle $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in W_{X_{i_1}} \times \dots \times W_{X_{i_k}}$ die Gleichungen

$$\Pr[X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_k} = x_{i_k}] = \Pr[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[X_{i_k} = x_{i_k}].$$

Insbesondere sind dann für beliebige x_1, \dots, x_n die Ereignisse

$$A_1 = (,X_1 = x_1\text{"}), \dots, A_n = (,X_n = x_n\text{"})$$

unabhängig.



Es gilt der folgende Satz, der die Unabhängigkeit von Ereignissen und die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen in Zusammenhang bringt.



Zuvor aber die

Definition der Indikatorvariablen (siehe Vorlesung):

Sei $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis. Dann heißt die Abbildung

$$I_A := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

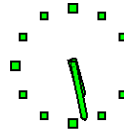
eine Indikatorvariable des Ereignisses A .

Bezüglich des gegebenen Wahrscheinlichkeitsraumes ist jede Indikatorvariable eine Zufallsvariable.



Satz:

Die Ereignisse A_1, \dots, A_n sind genau dann unabhängig, wenn die Indikatorvariablen I_{A_1}, \dots, I_{A_n} unabhängig sind.





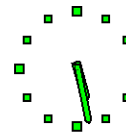
3.2 Konstruktion unabhängiger Ereignisse

Thema ist die allgemeine Konstruktion unabhängiger Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein **Verfahren**, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert.

Für die **Konstruktionsschritte** sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.



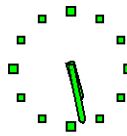
3.2 Konstruktion unabhängiger Ereignisse

Thema ist die allgemeine Konstruktion unabhängiger Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein **Verfahren**, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert.

Für die **Konstruktionsschritte** sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.



• 1. Schritt:

Wir **wählen** ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.
Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. *Beweis!*

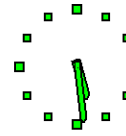
• $(k+1)$ ter Schritt:

Sei $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i .

Dann **wählen** wir für jedes $s = (s_1, \dots, s_k)$ und Ereignis $A^s = \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$ ein (Teil-)Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $\Pr[B^s | A^s] = p_{k+1}$ (der Exponent s_i sei definiert wie in der Vorlesung).

Wir definieren $A_{k+1} = \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. *Beweis!*



• 1. Schritt:

Wir **wählen** ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.
Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. *Beweis!*

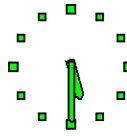
• $(k+1)$ ter Schritt:

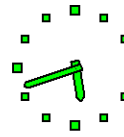
Sei $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i .

Dann **wählen** wir für jedes $s = (s_1, \dots, s_k)$ und Ereignis $A^s = \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$ ein (Teil-)Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $\Pr[B^s | A^s] = p_{k+1}$ (der Exponent s_i sei definiert wie in der Vorlesung).

Wir definieren $A_{k+1} = \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

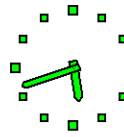
Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. *Beweis!*





VA 1

- 1 Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.
- 2 Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.



Konstruktion des Beispiels:

Wir wählen $\Omega = [24]$ und $\Pr[x] = \frac{1}{24}$ für alle $x \in \Omega$.

Wir benutzen die Schreibweisen des obigen Verfahrens zusammen mit Intervallen $[a, b] = \{a, a + 1, \dots, b\} \subseteq \mathbb{N}$.

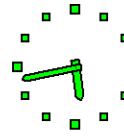
Sei $A = A_1 = [1, 12]$. Dann gilt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.

Es folgen $A^{(1)} = [1, 12]$ und $A^{(0)} = [13, 24]$.

Seien $B^{(1)} = [9, 12]$ und $B^{(0)} = [13, 16]$.

Dann gilt $A_2 = B^{(1)} \cup B^{(0)} = [9, 16]$.

Wir setzen $B = A_2$ und erhalten $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.



Wir haben nun die Partition

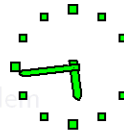
$$\begin{aligned} A^{(1,1)} &= A_1 \cap A_2 = [9, 12], \\ A^{(0,1)} &= \overline{A_1} \cap A_2 = [13, 16], \\ A^{(1,0)} &= A_1 \cap \overline{A_2} = [1, 8], \\ A^{(0,0)} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} = [17, 24]. \end{aligned}$$

Seien

$$B^{(1,1)} = \{9\}, B^{(0,1)} = \{16\}, B^{(1,0)} = \{7, 8\}, B^{(0,0)} = \{17, 18\}.$$

$$\text{Dann gilt } A_3 = B^{(1,1)} \cup B^{(0,1)} \cup B^{(1,0)} \cup B^{(0,0)} = [7, 9] \cup [16, 18].$$

$$\text{Wir setzen } C = A_3 \text{ und erhalten } \Pr[C] = \frac{1}{4}.$$



Beweis der Korrektheit der Konstruktion:

Zunächst berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\Pr[A_{k+1}]$ mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned} \Pr[A_{k+1}] &= \Pr\left[\bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s\right] \\ &= \sum_{s \in \{0,1\}^k} \Pr[B^s | A^s] \cdot \Pr[A^s] \\ &= \sum_{s \in \{0,1\}^k} p_{k+1} \cdot \Pr[A^s] \\ &= p_{k+1} \sum_{s \in \{0,1\}^k} \Pr[A^s] \\ &= p_{k+1}. \end{aligned}$$

