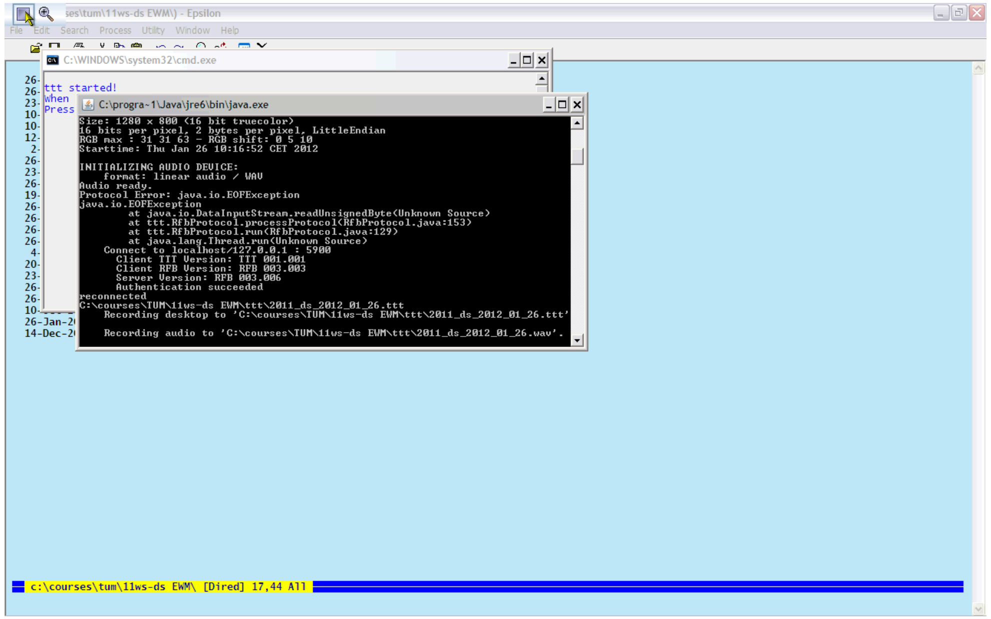
Script generated by TTT

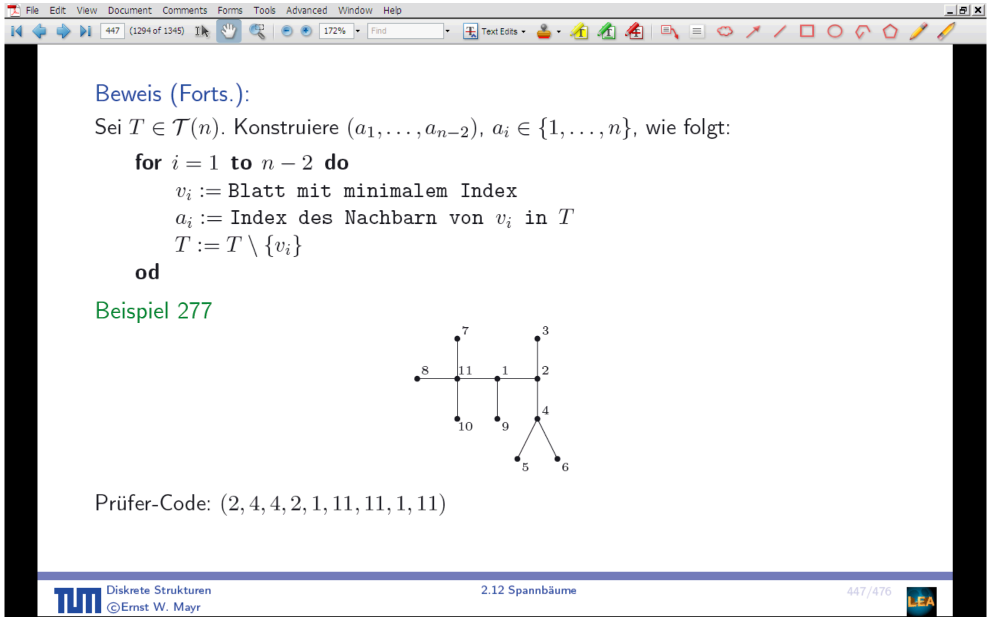
Title: Mayr: 2011 ds (26.01.2012)

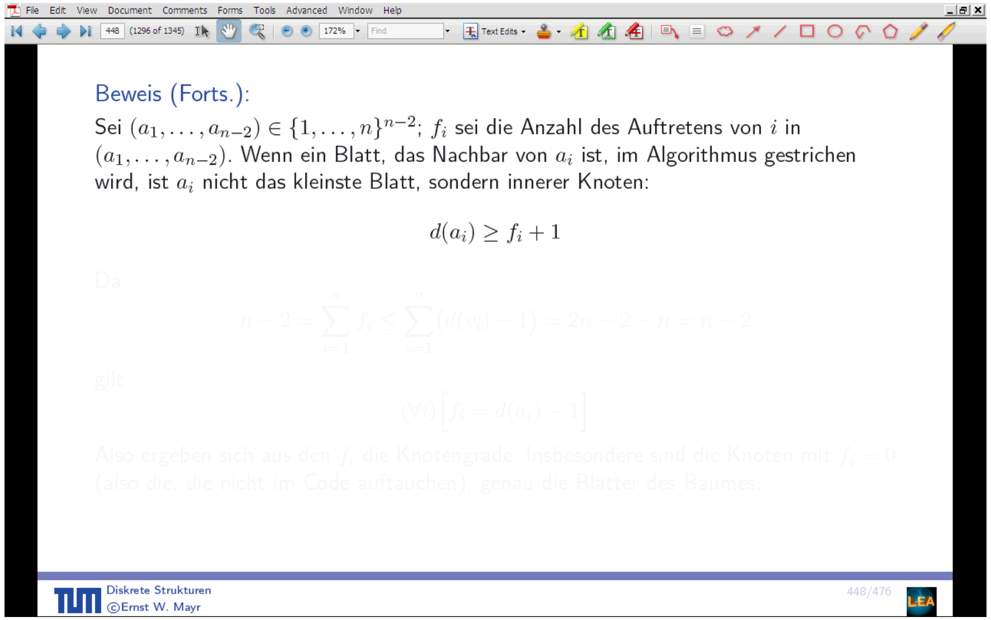
Date: Thu Jan 26 10:25:26 CET 2012

Duration: 81:20 min

Pages: 37





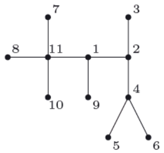


Beweis (Forts.):

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$, wie folgt:

for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
    $v_i :=$ `Blatt mit minimalem Index`
    $a_i :=$ `Index des Nachbarn von` v_i `in` T
    $T := T \setminus \{v_i\}$
od

Beispiel 277



Prüfer-Code: $(2, 4, 4, 2, 1, 11, 11, 1, 11)$

Beweis (Forts.):

Umkehrabbildung: Gegeben $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$

for $i = 1$ **to** n **do**
    $d(v_i) := f_i + 1$
od
$B := \emptyset;\ T := \emptyset$
for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
    $b := \min_{1 \le j \le n} \{j;\ j \notin \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-2}\} \cup B\}$
    `füge Kante` (b, a_i) `zu` T `hinzu`
    $B := B \cup \{b\}$
od
`füge letzte Kante zu` T `gemäß Gradbedingung hinzu`

$\square$

Beweis (Forts.):

Umkehrabbildung: Gegeben $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$

for $i = 1$ **to** n **do**
    $d(v_i) := f_i + 1$
od
$B := \emptyset;\ T := \emptyset$
for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
    $b := \min_{1 \le j \le n} \{j;\ j \notin \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-2}\} \cup B\}$
    `füge Kante` (b, a_i) `zu` T `hinzu`
    $B := B \cup \{b\}$
od
`füge letzte Kante zu` T `gemäß Gradbedingung hinzu`

$\square$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 2.12 Spannbäume 449/476

2.13 Brücken

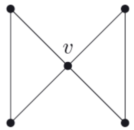
Definition 278

Eine Kante e eines Graphen $G = (V, E)$ heißt Brücke, falls $G' = (V, E \setminus \{e\})$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.

Beispiel 279

Beobachtung:
Eine Kante e ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen (einfachen) Kreis gibt, der e enthält.

Anmerkung: (ohne Definition)
Der Knoten v in der folgenden Abbildung ist ein Artikulationsknoten:



2.14 Abstand

Definition 280
Seien u, v zwei Knoten und P ein Pfad in G von u nach v mit einer minimalen Anzahl k von Kanten. Dann heißt

$$d(u, v) := k$$

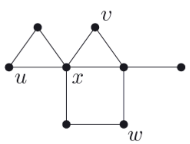
der Abstand von u und v in G.

Wir setzen $d(u, v) := \infty$, falls u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G liegen.

$$D(G) := \max\{d(u, v); u, v \in V\}$$

heißt der Durchmesser des Graphen G.

Beispiel 281



$d(u, v) = 2$, $d(u, w) = 3$, $d(u, x) = 1$, $D(G) = 3$.

Beobachtung:
d erfüllt die Dreiecksungleichung, ist also eine Metrik:

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$

2.15 Adjazenzmatrix

Definition 282
Sei $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Beobachtungen:

Satz 283

Sei A die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$, $|V| = n$, und sei

$$A^0 := I,$$
$$A^{i+1} := A^i \cdot A \qquad \text{für alle } i \geq 0.$$

Dann gilt für

$$A^k = (a_{ij}{}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}:$$

$a_{i,j}{}^{(k)}$ ist die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k in G von v_i nach v_j.

Achtung: Die Länge eines Pfades wird hier durch die Länge seiner Kanten- und nicht der Knotenfolge angegeben!

Beweis:

Induktion nach k:

Induktionsanfang: $k = 0$ und $k = 1$ sind trivial.

Beweis:

Induktion nach k:

Induktionsanfang: $k = 0$ und $k = 1$ sind trivial.

Induktionsschluss: $k \mapsto k + 1$
$a_{il}{}^{(k)}$ ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k von v_i nach v_l.
Die Anzahl verschiedener Pfade von v_i nach v_j der Länge $k + 1$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il}{}^{(k)} \cdot a_{lj} = a_{ij}{}^{(k+1)}$$

$\square$

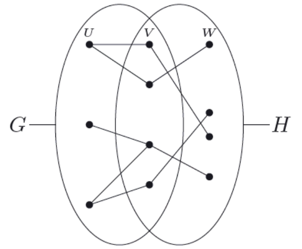
Bemerkung:

Adjazenzmatrix von bipartiten Graphen
Sei $G = (U, V, E)$ mit $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ein bipartiter Graph.
Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Werden zwei bipartite Graphen zusammengesetzt, zum Beispiel:



berechnet sich die Adjazenzmatrix A' des bipartiten Graphen $G' = (U, W, E')$, mit

$$\{u, w\} \in E' \iff (\exists v \in V)[\{u, v\} \text{ in } G \text{ und } \{v, w\} \text{ in } H]$$

als das boolesche Produkt $A_G \cdot A_H$:

Wir betrachten einfache ungerichtete Graphen.

Definition 284

Seien $A \in \mathbb{B}^{m,k}$, $B \in \mathbb{B}^{k,n}$ zwei boolesche Matrizen, interpretiert als $0, 1$-Matrizen. Dann ist das boolesche Produkt $C = AB$ der beiden Matrizen gegeben durch

$$c_{i,j} = \bigvee_{l=1}^{k} a_{i,l} \wedge b_{l,j} \qquad \text{für } i \in [m], j \in [n]$$

2.16 Inzidenzmatrix

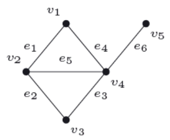
Definition 285

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \quad \text{mit} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von G.

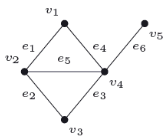
Beispiel 286 (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Adjazenzmatrix:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



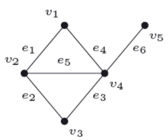
Inzidenzmatrix:

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} d(v_1) & & & 0 \\ & d(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d(v_n) \end{pmatrix} + A$$

Beispiel (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Inzidenzmatrix:

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 2.16 Inzidenzmatrix 462/476

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} d(v_1) & & & 0 \\ & d(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d(v_n) \end{pmatrix} + A$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 2.16 Inzidenzmatrix 463/476

3. Definitionen für gerichtete Graphen

3.1 Digraph

Definition 287

Ein Digraph (aka gerichteter Graph, engl. *directed graph*) $G = (V, A)$ besteht aus einer Knotenmenge V und einer Menge $A \subseteq V \times V$ von geordneten Paaren, den gerichteten Kanten.

3.2 Grad

Definition 288

- $\mathrm{d}^-(v)$ ist der Aus-Grad von v, d. h. die Anzahl der Kanten mit Anfangsknoten v.
- $\mathrm{d}^+(v)$ ist der In-Grad von v, d. h. die Anzahl der Kanten mit Endknoten v.
- $\mathrm{d}(v) = \mathrm{d}^-(v) + \mathrm{d}^+(v)$ ist der (Gesamt-)Grad von v.

Beobachtung:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}^-(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{d}^+(v) = |A|$$

3.3 Adjazenzmatrix

Definition 289

Sei $G = (V, A)$ ein Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{mit } c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_i, v_j) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Falls G schlingenfrei ist, sind alle Diagonalelemente von C gleich 0.

3.4 Inzidenzmatrix

Definition 290

Sei $G = (V, A)$ ein einfacher(!) Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $A = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \text{ Endknoten von } e_j \\ -1 & \text{falls } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von G.

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(v_1) & & & \\ & \mathrm{d}(v_2) & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \mathrm{d}(v_n) \end{pmatrix} - A'$$

Diese Matrix heißt Laplacesche Matrix. Dabei ist, für alle i, j, der Eintrag $a'_{i,j}$ die Anzahl der im zu G gehörigen ungerichteten Graphen zwischen v_i und v_j verlaufenden Kanten. Enthält G keine antiparallelen Kanten, ist damit A' gleich der Adjazenzmatrix dieses ungerichteten Graphen.

Beobachtung: Die Laplacesche Matrix ist symmetrisch.

3.5 Gerichteter Pfad

Definition 291

Eine Folge $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ mit $u_i \in V$ für $i = 0, \ldots, n$ heißt gerichteter Pfad, wenn

$$(\forall i \in \{0, \ldots, n-1\})\Big[(u_i, u_{i+1}) \in A\Big].$$

Ein gerichteter Pfad heißt einfach, falls alle u_i paarweise verschieden sind.

3.7 dag

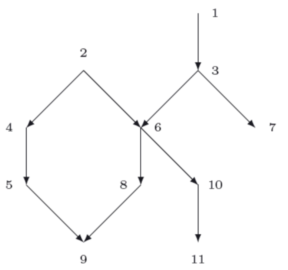
Definition 293

Ein Digraph, der keinen gerichteten Kreis enthält, heißt *directed acyclic graph*, kurz dag.

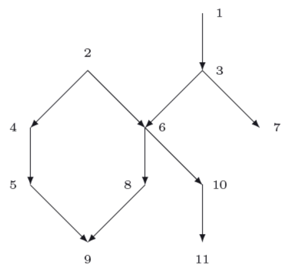
In einem dag heißen Knoten mit In-Grad 0 Quellen, Knoten mit Aus-Grad 0 Senken. Eine Nummerierung $i : V \to \{1, \ldots, |V|\}$ der Knoten eines *dags* heißt topologisch, falls für jede Kante $(u, v) \in A$ gilt:

$$i(u) < i(v).$$

Beispiel 294



Beispiel 294



3.8 Zusammenhang

Definition 295

Ein Digraph heißt zusammenhängend, wenn der zugrundeliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

3.9 Starke Zusammenhangskomponenten

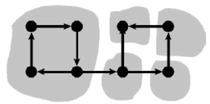
Definition 296

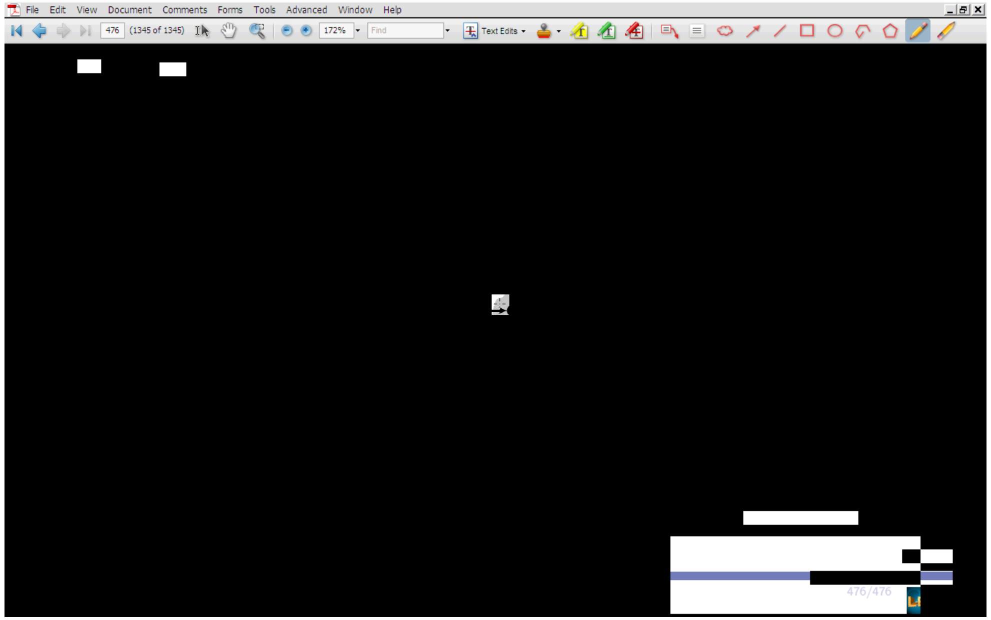
Sei $G = (V, A)$ ein Digraph. Man definiert eine Äquivalenzrelation $R \subseteq V \times V$ wie folgt:

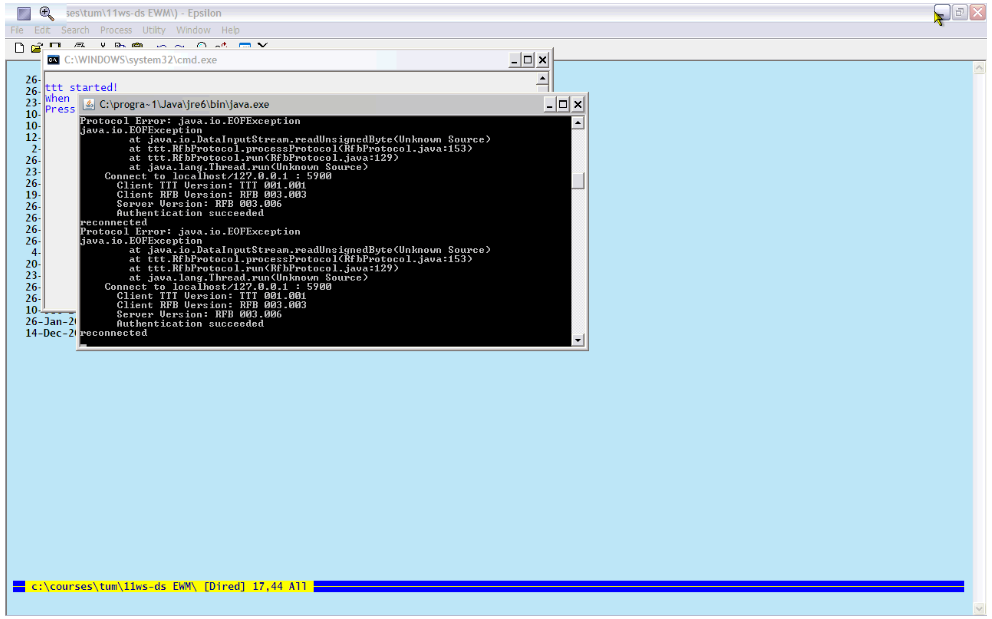
$$uRv \iff \begin{cases} \text{es gibt in } G \text{ einen gerichteten Pfad von } u \text{ nach } v \\ \text{und einen gerichteten Pfad von } v \text{ nach } u. \end{cases}$$

Die von den Äquivalenzklassen dieser Relation induzierten Teilgraphen heißen die starken Zusammenhangskomponenten von G.

Beispiel 297




File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help
476 (1345 of 1345)
172%
Text Edits
476/476


ses\tum\11ws-ds EWM\) - Epsilon
File Edit Search Process Utility Window Help
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
ttt started!
When
Press
C:\progra~1\Java\jre6\bin\java.exe
Protocol Error: java.io.EOFException
java.io.EOFException
at java.io.DataInputStream.readUnsignedByte(Unknown Source)
at ttt.RfbProtocol.processProtocol(RfbProtocol.java:153)
at ttt.RfbProtocol.run(RfbProtocol.java:129)
at java.lang.Thread.run(Unknown Source)
Connect to localhost/127.0.0.1 : 5900
Client TTT Version: TTT 001.001
Client RFB Version: RFB 003.003
Server Version: RFB 003.006
Authentication succeeded
reconnected
Protocol Error: java.io.EOFException
java.io.EOFException
at java.io.DataInputStream.readUnsignedByte(Unknown Source)
at ttt.RfbProtocol.processProtocol(RfbProtocol.java:153)
at ttt.RfbProtocol.run(RfbProtocol.java:129)
at java.lang.Thread.run(Unknown Source)
Connect to localhost/127.0.0.1 : 5900
Client TTT Version: TTT 001.001
Client RFB Version: RFB 003.003
Server Version: RFB 003.006
Authentication succeeded
reconnected
26-Jan-2
14-Dec-2
c:\courses\tum\11ws-ds EWM\ [Dired] 17,44 All