Script generated by TTT

Title: Mayr: 2011 ds (24.01.2012)

Date: Tue Jan 24 13:44:37 CET 2012

Duration: 92:56 min

Pages: 50

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

Inhaltsverzeichnis

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

2. Definitionen für ungerichtete Graphen

Falls nicht explizit anders gesagt, sind in diesem Abschnitt alle betrachteten Graphen als *einfach* vorausgesetzt.

2.1 Pfade und Kreise

Definition 253

Ein Pfad (Weg) in einem Graphen ist eine Folge von Knoten $v_0, v_1, \ldots, v_k$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E, i = 0, \ldots, k-1$.

Ein Pfad heißt **einfach**, wenn alle v_i paarweise verschieden sind.

Ein **Kreis** ist ein Pfad, bei dem gilt: $v_0 = v_k$.

Ein Kreis heißt **einfach**, wenn die Knoten $v_0, \ldots, v_{k-1}$ paarweise verschieden sind.

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

2.2 Isomorphe Graphen

Definition 254

Zwei Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ heißen isomorph, falls es eine Bijektion $\varphi : V_1 \to V_2$ gibt, so dass gilt:

$$(\forall v, w \in V_1)\Big[\{v, w\} \in E_1 \iff \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2\Big].$$

Beispiel 255

$K_{2,2} \cong C_4 \cong Q_2$ oder $T_{1,1,1} \cong Q_3$

Beispiel 256

2.3 Adjazenz

Definition 257

Sei $G = (V, E)$, $u, v \in V$ und $\{u, v\} \in E$. Dann heißen u und v adjazent (aka benachbart). u und v sind Endknoten von $\{u, v\}$; u und v sind inzident zur Kante $\{u, v\}$. Zwei Kanten heißen adjazent, falls sie einen Endknoten gemeinsam haben.

2.4 Nachbarschaft

Definition 258

Sei $u \in V$.

$$N(u) := \{v \in V; u \neq v, \{u, v\} \in E\}$$

heißt die Nachbarschaft von u.

$d(u) := \deg(u) := |N(u)|$ heißt Grad von u.

Falls $d(u) = 0$, so heißt u isoliert.

2.4 Nachbarschaft

Definition 258

Sei $u \in V$.

$$N(u) := \{v \in V; u \neq v, \{u, v\} \in E\}$$

heißt die Nachbarschaft von u.

$d(u) := \deg(u) := |N(u)|$ heißt Grad von u.

Falls $d(u) = 0$, so heißt u isoliert.

2.4 Nachbarschaft

Definition 258

Sei $u \in V$.

$$N(u) := \{v \in V; u \neq v, \{u, v\} \in E\}$$

heißt die Nachbarschaft von u.

$d(u) := \deg(u) := |N(u)|$ heißt Grad von u.

Falls $d(u) = 0$, so heißt u isoliert.

2.5 Gradfolge

Definition 259

Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o.B.d.A. so, dass

$$\mathrm{d}(v_1) \geq \mathrm{d}(v_2) \geq \ldots \geq \mathrm{d}(v_n).$$

Dann heißt $(\mathrm{d}(v_1), \mathrm{d}(v_2), \ldots, \mathrm{d}(v_n))$ die Gradfolge von G.

Bemerkung:
Isomorphe Graphen haben dieselbe Gradfolge

2.5 Gradfolge

Definition 259

Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o.B.d.A. so, dass

$$\mathrm{d}(v_1) \geq \mathrm{d}(v_2) \geq \ldots \geq \mathrm{d}(v_n).$$

Dann heißt $(\mathrm{d}(v_1), \mathrm{d}(v_2), \ldots, \mathrm{d}(v_n))$ die Gradfolge von G.

Bemerkung:
Isomorphe Graphen haben dieselbe Gradfolge

Satz 260

Sei $G = (V, E)$. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis:
$\sum \mathrm{d}(v)$ zählt Halbkanten $\square$

Korollar 261

In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

2.6 Reguläre Graphen

Definition 262

Ein Graph $G = (V; E)$ heißt k-regulär genau dann, wenn

$$(\forall v \in V)\left[\mathrm{d}(v) = k\right].$$

Beispiel 263

Q_k ist k-regulär; $T_{m_1,\ldots,m_k}$ ist $2k$-regulär.

2.6 Reguläre Graphen

Definition 262

Ein Graph $G = (V; E)$ heißt *k-regulär* genau dann, wenn

$$(\forall v \in V)\Big[\mathrm{d}(v) = k\Big].$$

Beispiel 263

Q_k ist k-regulär; $T_{m_1,\ldots,m_k}$ ist $2k$-regulär.

2.7 Teilgraphen

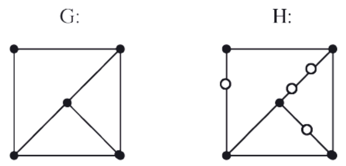
Definition 264

1. $G' = (V', E')$ heißt *Teilgraph* von $G = (V, E)$, falls

$$V' \subseteq V \quad \wedge \quad E' \subseteq E.$$

2. Ein Graph $H = (\overline{V}, \overline{E})$ heißt *Unterteilung* von $G = (V, E)$, falls H aus G dadurch entsteht, dass jede Kante $\{v, w\} \in E$ durch einen Pfad $v = \overline{v}_0, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k = w$ ersetzt wird. Dabei sind $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{k-1}$ jeweils neue Knoten.

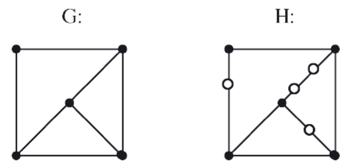
Beispiel 265 (Unterteilung)



Bemerkung: (Satz von Kuratowski) Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.

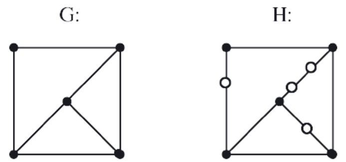
File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

Beispiel 265 (Unterteilung)



Bemerkung: (Satz von Kuratowski) Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.

Beispiel 265 (Unterteilung)



Bemerkung: (Satz von Kuratowski) Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.

2.8 Induzierte Teilgraphen

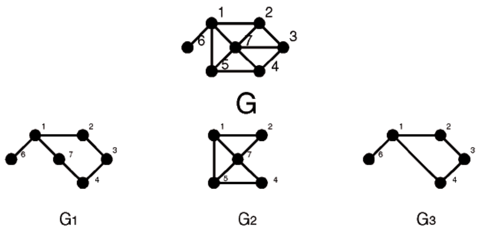
Definition 266
Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt (knoten-)induzierter Teilgraph von $G = (V, E)$, falls G' Teilgraph von G ist und $E' = E \cap (V' \times V')$.

Beispiel 267

2.8 Induzierte Teilgraphen

Definition 266
Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt (knoten-)induzierter Teilgraph von $G = (V, E)$, falls G' Teilgraph von G ist und $E' = E \cap (V' \times V')$.

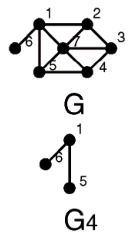
Beispiel 267



G_1 ist Teilgraph von G, aber nicht knoteninduziert; G_2 ist der von $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ induzierte Teilgraph; G_3 ist nicht Teilgraph von G

Sei $V' \subseteq V$. Dann bezeichnet $G \setminus V'$ den durch $V \setminus V'$ induzierten Teilgraphen von G.

Beispiel 268
$G_4 = G \setminus \{2, 3, 4, 7\}$



2.9 Erreichbarkeit

Definition 269
Sei $G = (V, E)$; $u, v \in V$. v heißt von u aus in G erreichbar, falls G einen Pfad mit Endknoten u und v enthält.

Satz 270
Die Relation $R \subseteq V \times V$ mit

$$uRv \iff \text{„}v \text{ ist von } u \text{ aus in } G \text{ erreichbar“}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:
Es ist leicht zu sehen, dass R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. □

2.10 Zusammenhangskomponenten

Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation heißen Zusammenhangskomponenten von G. G heißt zusammenhängend, falls G aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.

2.10 Zusammenhangskomponenten

Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation heißen Zusammenhangskomponenten von G. G heißt zusammenhängend, falls G aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.

2.11 Bäume

Definition 271
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt Baum, falls G zusammenhängend und kreisfrei ist.

Satz 272

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *$G = (V, E)$ ist ein nichtleerer Baum.*
2. *$V \neq \emptyset$ und für je zwei Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen u und v.*
3. *G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.*

Satz 272

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *$G = (V, E)$ ist ein nichtleerer Baum.*
2. *$V \neq \emptyset$ und für je zwei Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen u und v.*
3. *G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.*

2.11 Bäume

Definition 271

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt Baum, falls G zusammenhängend und kreisfrei ist.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2.

Seien $u, v \in V$, $u \neq v$. Da G zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad zwischen u und v existieren.

Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade zwischen u und v.

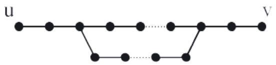
Dann gibt es einen Kreis in G, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2.

Seien $u, v \in V$, $u \neq v$. Da G zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad zwischen u und v existieren.

Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade zwischen u und v.



Dann gibt es einen Kreis in G, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

Beweis (Forts.):

2. $\Rightarrow$ 3. Beweis durch Induktion:

Dass G zusammenhängend und V nichtleer sein muss, ist klar. Für $|E| = 0$ gilt $|V| = 1$ (Induktionsanfang).

G muss einen Knoten mit Grad 1 enthalten: Wähle $u \in V$ beliebig. Wähle einen Nachbarn u_1 von u. Falls $deg(u_1) > 1$, wähle einen Nachbarn $u_2 \neq u$ von u_1 usw. Da V endlich und G zusammenhängend und kreisfrei ist (sonst gäbe es ein Knotenpaar mit zwei verschiedenen einfachen Pfaden dazwischen), kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1).

Entfernt man dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet auf den entstehenden Graphen die IV an, erhält man:

$$(|V| - 1) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass $|V| = |E| + 1$.

File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

Satz 272

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *$G = (V, E)$ ist ein nichtleerer Baum.*
2. *$V \neq \emptyset$ und für je zwei Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen u und v.*
3. *G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.*

File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2.

Seien $u, v \in V$, $u \neq v$. Da G zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad zwischen u und v existieren.

Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade zwischen u und v.

Dann gibt es einen Kreis in G, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

Satz 272

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *$G = (V, E)$ ist ein nichtleerer Baum.*
2. *$V \neq \emptyset$ und für je zwei Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen u und v.*
3. *G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.*

Beweis (Forts.):

$2. \Rightarrow 3.$ Beweis durch Induktion:

Dass G zusammenhängend und V nichtleer sein muss, ist klar. Für $|E| = 0$ gilt $|V| = 1$ (Induktionsanfang).

G muss einen Knoten mit Grad 1 enthalten: Wähle $u \in V$ beliebig. Wähle einen Nachbarn u_1 von u. Falls $deg(u_1) > 1$, wähle einen Nachbarn $u_2 \neq u$ von u_1 usw.

Da V endlich und G zusammenhängend und kreisfrei ist (sonst gäbe es ein Knotenpaar mit zwei verschiedenen einfachen Pfaden dazwischen), kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1).

Entfernt man dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet auf den entstehenden Graphen die IV an, erhält man:

$$(|V| - 1) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass $|V| = |E| + 1$.

Beweis (Forts.):

$3. \Rightarrow 1.$

Sei nun G zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.

Zu zeigen: G ist kreisfrei.

Widerspruchsannahme: G enthält einen einfachen Kreis $C = (V_C, E_C)$.

Da wir G aufbauen können, indem wir die Knoten in $V \setminus V_C$ mit jeweils einer neuen Kante hinzufügen und zum Schluss noch eventuell übrig gebliebene Kanten hinzufügen, gilt:

$$|V| = |V_C| + |V \setminus V_C| \le |E_C| + |E \setminus E_C| = |E|$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $|V| = |E| + 1$.

□

Beweis (Forts.):

$3. \Rightarrow 1.$

Sei nun G zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.

Zu zeigen: G ist kreisfrei.

Widerspruchsannahme: G enthält einen einfachen Kreis $C = (V_C, E_C)$.

Da wir G aufbauen können, indem wir die Knoten in $V \setminus V_C$ mit jeweils einer neuen Kante hinzufügen und zum Schluss noch eventuell übrig gebliebene Kanten hinzufügen, gilt:

$$|V| = |V_C| + |V \setminus V_C| \le |E_C| + |E \setminus E_C| = |E|$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $|V| = |E| + 1$.

□

Korollar 273
Seien $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ die Gradfolge von T, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot |E| = 2n - 2$$

2.12 Spannbäume

Definition 274
Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt Spannbaum von G, falls T ein Baum und $V' = V$ ist.

File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

Korollar 273
Seien $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ die Gradfolge von T, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot |E| = 2n - 2$$

Diskrete Strukturen 2.11 Bäume 442/453
©Ernst W. Mayr

File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

2.12 Spannbäume

Definition 274
Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt Spannbaum von G, falls T ein Baum und $V' = V$ ist.

Diskrete Strukturen 2.12 Spannbäume 443/453
©Ernst W. Mayr

Satz 275 (Arthur Cayley, 1889)

Sei $t(n)$ die Anzahl der verschiedenen markierten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \ldots, n\}$. Dann gilt:

$$t(n) = n^{n-2}$$

Beispiel 276

Satz 275 (Arthur Cayley, 1889)

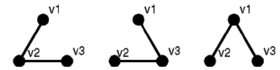
Sei $t(n)$ die Anzahl der verschiedenen markierten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \ldots, n\}$. Dann gilt:

$$t(n) = n^{n-2}$$

Beispiel 276

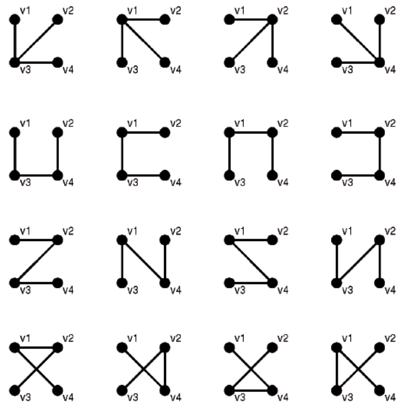
- $n = 2$:

- $n = 3$:



Beispiel (Forts.)

- $n = 4$:



Beweis:

Wir geben eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{T}(n)$ der markierten Spannbäume mit n Knoten und der Menge $\{1, \ldots, n\}^{n-2}$ an.
(Diese Bijektion geht auf H. Prüfer zurück; man bezeichnet sie deshalb auch als Prüfer-Code.)

Beweis (Forts.):

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$, wie folgt:

for $i = 1$ **to** $n-2$ **do**
  $v_i :=$ `Blatt mit minimalem Index`
  $a_i :=$ `Index des Nachbarn von` v_i `in` T
  $T := T \setminus \{v_i\}$
od

Beispiel 277

Beweis (Forts.):

Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$; f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} (d(v_i) - 1) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\left[f_i = d(a_i) - 1\right]$$

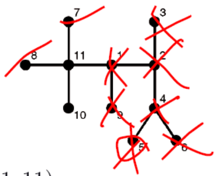
Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

Beweis (Forts.):

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$, wie folgt:

for $i = 1$ **to** $n-2$ **do**
  $v_i :=$ `Blatt mit minimalem Index`
  $a_i :=$ `Index des Nachbarn von` v_i `in` T
  $T := T \setminus \{v_i\}$
od

Beispiel 277



Prüfer-Code: $(2, 4, 4, 2, 1, 11, 11, 1, 11)$

Beweis (Forts.):

Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$; f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} (d(v_i) - 1) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\left[f_i = d(a_i) - 1\right]$$

Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

Beweis (Forts.):

Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$; f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} \big(d(v_i) - 1\big) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\Big[f_i = d(a_i) - 1\Big]$$

Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

Beweis (Forts.):

Umkehrabbildung: Gegeben $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$

for $i = 1$ **to** n **do**
  $d(v_i) := f_i + 1$
od
$B := \emptyset$; $T := \emptyset$
for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
  $b := \min\limits_{1 \leq j \leq n} \{j;\ j \notin \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-2}\} \cup B\}$
  `füge Kante` (b, a_i) `zu` T `hinzu`
  $B := B \cup \{b\}$
od
`füge letzte Kante zu` T `gemäß Gradbedingung hinzu`

$\square$

Beweis (Forts.):

Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$; f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} \big(d(v_i) - 1\big) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\Big[f_i = d(a_i) - 1\Big]$$

Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.