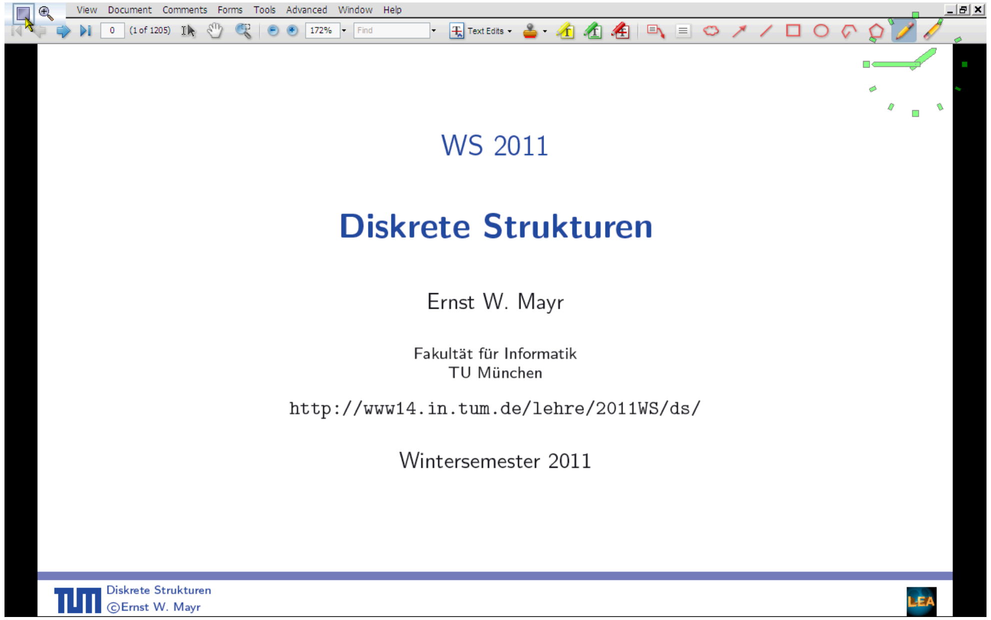
Script generated by TTT

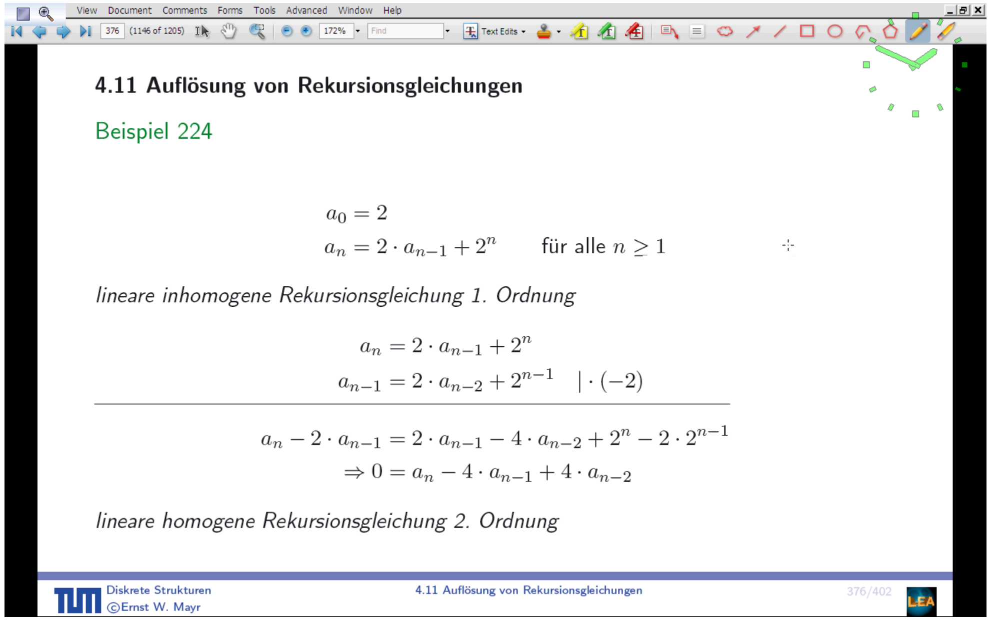
Title: Mayr: 2011 ds (17.01.2012)

Date: Tue Jan 17 13:45:32 CET 2012

Duration: 91:39 min

Pages: 42





Beispiel (Forts.)

Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende charakteristische Polynom:

$$(x-2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die a_n hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen $(a_0 = 2, a_1 = 6)$ ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$. Damit gilt

$$a_n = (n+2) \cdot 2^n \qquad \forall n \geq 0$$

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

Beispiel 224

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \qquad \text{für alle } n \geq 1 \end{aligned}$$

lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \\ a_{n-1} &= 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 = a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$$

lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung

Beispiel (Forts.)

Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende charakteristische Polynom:

$$(x-2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die a_n hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen $(a_0 = 2, a_1 = 6)$ ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$. Damit gilt

$$a_n = (n+2) \cdot 2^n \qquad \forall n \geq 0$$

Beispiel (Forts.)

Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende charakteristische Polynom:

$$(x-2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die a_n hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen $(a_0 = 2, a_1 = 6)$ ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$. Damit gilt

$$a_n = (n+2) \cdot 2^n \qquad \forall n \geq 0$$

Beispiel 225

Sei $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$ und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \forall n \geq 3$$

(also $(a_i)_{i\geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots)$). Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x - 1 = 0 &= (x-1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x-i)(x+i). \end{aligned}$$

Setze nun $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann $c_1 = 1$ und $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$, also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

Beispiel 225

Sei $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$ und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \forall n \geq 3$$

(also $(a_i)_{i\geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots)$). Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x - 1 = 0 &= (x-1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x-i)(x+i). \end{aligned}$$

Setze nun $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann $c_1 = 1$ und $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$, also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

Satz 226

Sei $(q_1, q_2, \ldots, q_d)$ eine gegebene Folge, $q_i \in \mathbb{C}, d \geq 1, q_d \neq 0$. Sei weiter

$$q(z) := 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d$$

Das reflektierte Polynom dazu ist

$$q^R(z) := z^{\deg(q)} \cdot q\left(\frac{1}{z}\right) = z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + \ldots + q_d$$

(Bemerkung: $q^R(z)$ ist das charakteristische Polynom). Seien $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq k}$ die verschiedenen Nullstellen von q^R, sei d_i die Vielfachheit von α_i. Damit ist

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = d.$$

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, *mit*

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

1. **Lineare Rekursion:** *(d ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\right]$$

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, *mit*

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

1. **Lineare Rekursion:** *(d ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\right]$$

2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Satz 226 (Forts.)

3. **Partialbruchzerlegung:** *Es gibt Polynome g_i, $\deg(g_i) < d_i$ für $i = 1, \ldots, k$, so dass*

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$$

Satz 226 (Forts.)

3. **Partialbruchzerlegung:** *Es gibt Polynome g_i, $\deg(g_i) < d_i$ für $i = 1, \ldots, k$, so dass*

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$$

4. **Explizite Darstellung:** *Es gibt Polynome p_i, $\deg(p_i) < d_i$, so dass*

$$(\forall n \geq 0)\left[f_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot {\alpha_i}^n\right]$$

Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n\geq 0} : (f_n)_{n\geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$$\dim(V_2) = d \text{ (} p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (} g_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (} p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

Um zu zeigen $V_i = V_j$, genügt es daher, $V_i \subseteq V_j$ zu zeigen.

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

1. **Lineare Rekursion:** *(d ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\right]$$

2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n\geq 0} : (f_n)_{n\geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$$\dim(V_2) = d \text{ (} p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (} g_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \text{ (} p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

Um zu zeigen $V_i = V_j$, genügt es daher, $V_i \subseteq V_j$ zu zeigen.

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

1. **Lineare Rekursion:** *(d ist die Ordnung der Rekursion)*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0\right]$$

2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n\geq 0} : (f_n)_{n\geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1,2,3,4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$$\dim(V_2) = d \ (p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten})$$

$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \ (g_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten})$$

$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^{k} d_i = d \ (p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten})$$

Um zu zeigen $V_i = V_j$, genügt es daher, $V_i \subseteq V_j$ zu zeigen.

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):

- $V_1 = V_2$: Sei $(f_n)_{n\geq 0} \in V_2$. Wir wissen, dass

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist

$$\tilde{F}(z) = (1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d) \cdot \sum_{n\geq 0} f_n z^n = p(z)$$

mit $\deg(p) \leq d-1$, also $[z^{d+n}]p(z) = 0$ für alle $n \geq 0$. Betrachte für $n \geq 0$

$$[z^{d+n}]\tilde{F}(z) = f_{n+d} + f_{n+d-1}q_1 + \ldots + f_n q_d = 0\,.$$

Damit gilt, dass

$$(f_n)_{n\geq 0} \in V_1,$$

also $V_2 \subseteq V_1$, und damit $V_1 = V_2$.

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):

- $V_2 = V_3$: Sei $(f_n)_{n\geq 0} \in V_3$, also

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}.$$

Zu zeigen ist, dass

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Betrachte hierzu

$$\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}.$$

Wir wissen, dass

$$q^R(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-\alpha_i)^{d_i}\,.$$

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):

Weiter gilt, dass

$$q^R(z) = z^d \cdot q(\frac{1}{z}),$$

also

$$\begin{aligned} q(z) = \left(q^R(z)\right)^R &= \left(\prod_{i=1}^{k} (z-\alpha_i)^{d_i}\right)^R \\ &= z^d \cdot \prod_{i=1}^{k} (\frac{1}{z} - \alpha_i)^{d_i} \\ &= \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}\,. \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Daraus erhält man (durch Bilden des Hauptnenners)

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(g_i(z) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (1 - \alpha_j z)^{d_j} \right)}{\prod_{i=1}^{k} (1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{q(z)} .$$

Es ist damit

$$\deg(p(z)) < d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} d_j = d ,$$

also $V_3 \subseteq V_2$ und damit $V_2 = V_3$.

- $V_3 = V_4$: Sei

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_3 .$$

Zu zeigen ist, dass

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_4 .$$

Es gilt, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} \qquad \deg(g_i(z)) < d_i .$$

Aus Satz 222 (5) (Folie 371) wissen wir, dass

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} \cdot x^n .$$

Damit gilt, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} &= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{n} \cdot (\alpha_i z)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{n} \cdot {\alpha_i}^n z^n . \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1} z + \ldots + g_{i,d_i - 1} z^{d_i - 1} = \sum_{j=0}^{d_i - 1} g_{i,j} z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{d_i - 1} g_{i,j} \cdot \binom{d_i + n - j - 1}{n - j} \cdot {\alpha_i}^{n-j} \right) \cdot z^n$$

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \ldots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n\ge 0}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}\cdot\binom{d_i+n-j-1}{n-j}\cdot{\alpha_i}^{n-j}\right)\cdot z^n$$

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \ldots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n\ge 0}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}\cdot\binom{d_i+n-j-1}{n-j}\cdot{\alpha_i}^{n-j}\right)\cdot z^n$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 390/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \ldots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n\ge 0}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}\cdot\binom{d_i+n-j-1}{n-j}\cdot{\alpha_i}^{n-j}\right)\cdot z^n$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 390/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):

Also gilt auch, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k}\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$$

$$= \sum_{n\ge 0}\left(\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\sum_{j=0}^{d_i-1}{\alpha_i}^{-j}\cdot g_{i,j}\cdot\binom{n+d_i-j-1}{d_i-1}}_{p_i(n)}\cdot{\alpha_i}^{n}\right)\cdot z^n$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n)\cdot{\alpha_i}^{n}\,.$$

Es gilt, dass $\deg(p_i(n)) \le d_i - 1$, und damit ist auch $(f_n)_{n\ge 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. □

Beweis (Forts.):

Also gilt auch, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i{}^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n+d_i-j-1}{d_i-1}}_{p_i(n)} \cdot \alpha_i{}^n \right) \cdot z^n$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot \alpha_i{}^n \,.$$

Es gilt, dass $\deg(p_i(n)) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $(f_n)_{n\geq 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. □

Beweis (Forts.):

$[z^n](\sum_{i\geq 0} a_i z^i) = a_n$

Also gilt auch, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$$

[2

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i{}^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n+d_i-j-1}{d_i-1}}_{p_i(n)} \cdot \alpha_i{}^n \right) \cdot z^n$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot \alpha_i{}^n \,.$$

Es gilt, dass $\deg(p_i(n)) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $(f_n)_{n\geq 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. □

Anwendung: Sei eine homogene Rekursion gegeben, z. B.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_0 = 0, F_1 = 1$$

1. Drücke die Rekursion in einer einzigen Formel aus, inklusive der Anfangsbedingungen. Wie immer ist $F_n = 0$ für $n < 0$. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ gilt auch für $n = 0$, aber für $n = 1$ ist $F_1 = 1$, die rechte Seite jedoch 0. Also ist die vollständige Rekursion

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \delta_{n,1},$$

mit

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexerniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von z entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n z^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-1} z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-2} z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n,1} z^n \\ &= z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z \end{aligned}$$

3. Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$$

2. Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexerniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von z entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n z^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-1}z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-2}z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n,1}z^n \\ &= z\cdot F(z) + z^2\cdot F(z) + z \end{aligned}$$

3. Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$$

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

2. Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexerniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von z entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n z^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-1}z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-2}z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n,1}z^n \\ &= z\cdot F(z) + z^2\cdot F(z) + z \end{aligned}$$

3. Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 393/402

4. Drücke die rechte Seite als formale Reihe aus und ermittle daraus die Koeffizienten. Dies ist der schwierigste Schritt. Zunächst schreiben wir $1-z-z^2$ in der Form $1-z-z^2 = (1-\alpha z)(1-\beta z)$ und ermitteln dann durch Partialbruchzerlegung die Konstanten a und b, so dass gilt:

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)} = \frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z}\,.$$

Es ergibt sich z.B.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} F(z) &= z\left(\frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z}\right) \\ &= z\left(a\sum_{n\ge 0}\alpha^n z^n + b\sum_{n\ge 0}\beta^n z^n\right) \\ &= \sum_{n\ge 1}(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1})z^n \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} F_n &= a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \end{aligned}$$

nachdem man die Konstanten a und b etwa aus den Gleichungen für F_0 und F_1 bestimmt hat.

Es gilt:

$$\begin{aligned}F(z) &= z\left(\frac{a}{1-\alpha z}+\frac{b}{1-\beta z}\right)\\ &= z\left(a\sum_{n\ge 0}\alpha^n z^n + b\sum_{n\ge 0}\beta^n z^n\right)\\ &= \sum_{n\ge 1}(a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1})z^n\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}F_n &= a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\end{aligned}$$

nachdem man die Konstanten a und b etwa aus den Gleichungen für F_0 und F_1 bestimmt hat.

4.12 Das Master-Theorem

Bei der Analyse von Divide-and-Conquer-Verfahren stößt man oft auf Rekursionen, die sich nicht als lineare Rekursionen formulieren lassen. So führt der Mergesort-Algorithmus in der Standardvariante zu der Rekursionsgleichung

$$C_n = C_{\lfloor n/2\rfloor} + C_{\lceil n/2\rceil} + n \quad \text{für alle } n > 1 \qquad \text{und} \quad C_1 = 0.$$

Löst man allgemein ein Problem der Größe n dadurch, dass man es in a Teilprobleme der Größe höchstens n/b aufteilt, so erhält man für die Laufzeit $T(n)$ eine Rekursion der Form

$$T(n) \le a\cdot T(n/b) + f(n)\,,$$

wobei $f(n)$ die Laufzeit für die Aufteilung in Teilprobleme und für das Zusammenfügen der Lösungen der Teilprobleme ist.