

Script generated by TTT

Title: Mayr: 2011 ds (17.01.2012)

Date: Tue Jan 17 13:45:32 CET 2012

Duration: 91:39 min

Pages: 42

WS 2011

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2011WS/ds/>

Wintersemester 2011

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr LEA

Inhaltsverzeichnis

▶ 1. Dezember	▶ 10. Januar	
▶ 3. November	▶ 12. Januar	
▶ 8. November	▶ 15. Dezember	▶ 17. Januar
▶ 10. November	▶ 20. Dezember	
▶ 15. November	▶ 22. Dezember	
▶ 17. November		
▶ 20. Oktober	▶ 22. November	
▶ 25. Oktober	▶ 24. November	
▶ 27. Oktober	▶ 29. November	

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 1/402 LEA

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

Beispiel 224

$$a_0 = 2$$
$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \quad \text{für alle } n \geq 1$$

lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n$$
$$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2)$$

$$a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1}$$
$$\Rightarrow 0 = a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$$

lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 376/402 LEA

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

377 | (1147 of 1205) | 172%

Text Edits

Beispiel (Forts.)
Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende charakteristische Polynom:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die a_n hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen ($a_0 = 2, a_1 = 6$) ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$.
Damit gilt

$$a_n = (n + 2) \cdot 2^n \quad \forall n \geq 0$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 377/402 LEA

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

376 | (1146 of 1205) | 172%

Text Edits

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

Beispiel 224

$$a_0 = 2$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \quad \text{für alle } n \geq 1$$

lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n$$

$$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2)$$

$$a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 = a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$$

lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 376/402 LEA

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

377 | (1147 of 1205) | 172%

Text Edits

Beispiel (Forts.)
Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende charakteristische Polynom:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die a_n hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen ($a_0 = 2, a_1 = 6$) ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$.
Damit gilt

$$a_n = (n + 2) \cdot 2^n \quad \forall n \geq 0$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 377/402 LEA

crobat Professional - [2011-ds.pdf]

File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

377 | (1148 of 1205) | 164%

Text Edits

Beispiel (Forts.)
Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende charakteristische Polynom:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die a_n hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen ($a_0 = 2, a_1 = 6$) ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$.
Damit gilt

$$a_n = (n + 2) \cdot 2^n \quad \forall n \geq 0$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 377/402 LEA

erobrat Professional - [2011-ds.pdf]

379 (1151 of 1205) 169%

Text Edit

Beispiel 225

Sei $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$ und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \quad \forall n \geq 3$$

(also $(a_i)_{i \geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots)$). Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0 = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x-i)(x+i).$$

Setze nun $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann $c_1 = 1$ und $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$, also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

379/402

erobrat Professional - [2011-ds.pdf]

379 (1155 of 1205) 169%

Text Edit

Beispiel 225

Sei $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$ und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \quad \forall n \geq 3$$

(also $(a_i)_{i \geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots)$). Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0 = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x-i)(x+i).$$

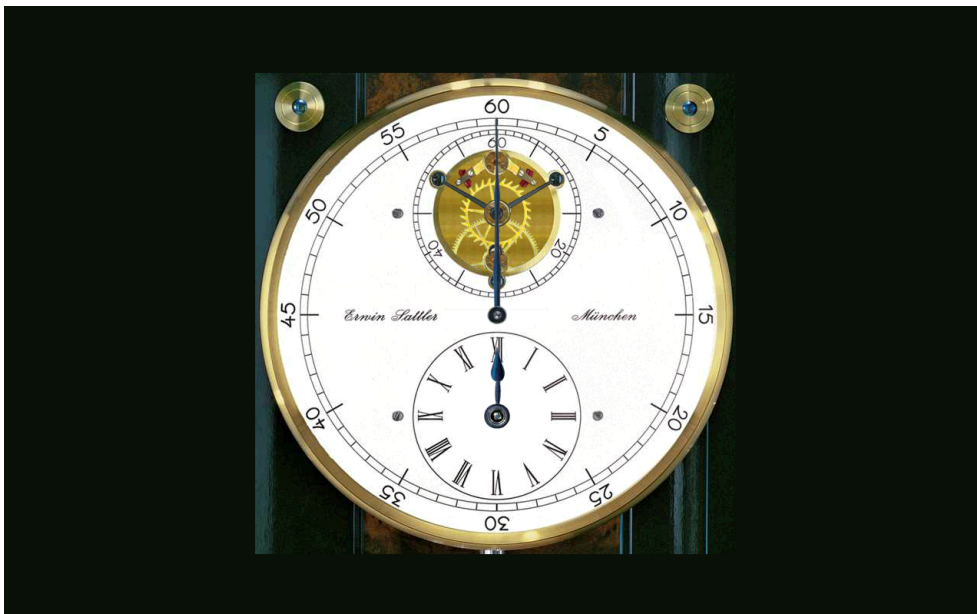
Setze nun $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann $c_1 = 1$ und $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$, also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

379/402



Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

380 (1156 of 1205) 169%

Text Edit

Satz 226

Sei (q_1, q_2, \dots, q_d) eine gegebene Folge, $q_i \in \mathbb{C}$, $d \geq 1$, $q_d \neq 0$. Sei weiter

$$q(z) := 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_d z^d$$

Das reflektierte Polynom dazu ist

$$q^R(z) := z^{d+1} q\left(\frac{1}{z}\right) = z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + \dots + q_d$$

(Bemerkung: $q^R(z)$ ist das charakteristische Polynom). Seien $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq d}$ die verschiedenen Nullstellen von q^R , sei d_i die Vielfachheit von α_i . Damit ist

$$\sum_{i=1}^k d_i = d.$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

380/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n \geq 0} f_n z^n \quad \ddot{+}$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1. **Lineare Rekursion:** (d ist die Ordnung der Rekursion)

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) [f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot f_n = 0]$$

- 2. Erzeugende Funktion:

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Diskrete Strukturen
© Ernst W. Mayr

381/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1. **Lineare Rekursion:** (d ist die Ordnung der Rekursion)

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) [f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot f_n = 0]$$

- 2. **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Diskrete Strukturen
© Ernst W. Mayr

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

381/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Satz 226 (Forts.)

- 3. **Partialbruchzerlegung:** Es gibt Polynome g_i , $\deg(g_i) < d_i$ für $i = 1, \dots, k$, so dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

- 4. Explizite Darstellung: Es gibt Polynome p_i , $\deg(p_i) < d_i$, so dass

$$(\forall n \geq 0) [f_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n] \quad \ddot{+}$$

Diskrete Strukturen
© Ernst W. Mayr

382/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Satz 226 (Forts.)

- 3. **Partialbruchzerlegung:** Es gibt Polynome g_i , $\deg(g_i) < d_i$ für $i = 1, \dots, k$, so dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

- 4. **Explizite Darstellung:** Es gibt Polynome p_i , $\deg(p_i) < d_i$, so dass

$$(\forall n \geq 0) [f_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n] \quad \ddot{+}$$

Diskrete Strukturen
© Ernst W. Mayr

382/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis:
Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n \geq 0} : (f_n)_{n \geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$$\dim(V_2) = d \text{ (} p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten) } \quad \ddots$$

$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} q_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten) }$$

$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten) }$$

Um zu zeigen $V_1 = V_3$, genügt es daher, $V_1 \subseteq V_3$ zu zeigen.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

383/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Satz 226 (Forts.)
Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

- **Lineare Rekursion:** (d ist die Ordnung der Rekursion)
 - \ddots
 - $(\forall n \in \mathbb{N}_0) [f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot f_n = 0]$
- Erzeugende Funktion:
 - $F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$
 - für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

381/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis:
Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n \geq 0} : (f_n)_{n \geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$$\dim(V_2) = d \text{ (} p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten) }$$

$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} q_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten) }$$

$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten) }$$

Um zu zeigen $V_1 = V_3$, genügt es daher, $V_1 \subseteq V_3$ zu zeigen.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

383/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Satz 226 (Forts.)
Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

- **Lineare Rekursion:** (d ist die Ordnung der Rekursion)
 - $(\forall n \in \mathbb{N}_0) [f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot f_n = 0]$
- **Erzeugende Funktion:**
 - $F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$
 - für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

381/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

383 | (1166 of 1205) | 169%

Beweis:
Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n \geq 0} : (f_n)_{n \geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$$\dim(V_2) = d \text{ (} p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} g_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

Um zu zeigen $V_1 = V_2$, genügt es daher, $V_1 \subseteq V_2$ zu zeigen.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

383/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

384 | (1170 of 1205) | 169%

Beweis (Forts.):

- $V_1 = V_2$: Sei $(f_n)_{n \geq 0} \in V_2$. Wir wissen, dass

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist

$$\tilde{F}(z) = (1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_d z^d) \cdot \sum_{n \geq 0} f_n z^n = p(z)$$

mit $\deg(p) \leq d-1$, also $[z^{d+n}]p(z) = 0$ für alle $n \geq 0$. Betrachte für $n \geq 0$

$$[z^{d+n}]\tilde{F}(z) = f_{n+d} + f_{n+d-1}q_1 + \dots + f_n q_d = 0.$$

Damit gilt, dass

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_1.$$

also $V_2 \subseteq V_1$, und damit $V_1 = V_2$.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

384/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

385 | (1174 of 1205) | 169%

Beweis (Forts.):

- $V_2 = V_3$: Sei $(f_n)_{n \geq 0} \in V_3$, also

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}.$$

Zu zeigen ist, dass

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Betrachte hierzu

$$\prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}.$$

Wir wissen, dass

$$q^R(z) = \prod_{i=1}^k (z - \alpha_i)^{d_i}.$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

385/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

386 | (1177 of 1205) | 169%

Beweis (Forts.):

Weiter gilt, dass

$$q^R(z) = z^d \cdot q\left(\frac{1}{z}\right),$$

also

$$q(z) = \left(q^R(z)\right)^R = \left(\prod_{i=1}^k (z - \alpha_i)^{d_i}\right)^R$$

$$= z^d \cdot \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{z} - \alpha_i\right)^{d_i}$$

$$= \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}.$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

386/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

387 (1179 of 1205) 169%

Beweis (Forts.):
Daraus erhält man (durch Bilden des Hauptnenners)

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^k \left(g_i(z) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (1 - \alpha_j z)^{d_j} \right)}{\prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist damit $\deg(p(z)) < d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k d_j = d$.

also $V_3 \subseteq V_2$ und damit $V_3 = V_2$.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr 387/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

388 (1181 of 1205) 169%

• $V_3 = V_4$: Sei $(f_n)_{n \geq 0} \in V_3$.

Zu zeigen ist, dass $(f_n)_{n \geq 0} \in V_4$.

Es gilt, dass $F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$ $\deg(g_i(z)) < d_i$.

Aus Satz 222 (5) (Folie 371) wissen wir, dass $\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} \cdot x^n$.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr 388/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

389 (1183 of 1205) 169%

Damit gilt, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} &= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{n} \cdot (\alpha_i z)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{n} \cdot \alpha_i^n z^n. \end{aligned}$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 389/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

390 (1184 of 1205) 169%

Beweis (Forts.):
Mit $g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \dots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j} \cdot \binom{d_i + n - j - 1}{n - j} \cdot \alpha_i^{n-j} \right) \cdot z^n$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 390/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):
Mit

$$g_i(z) = \underline{g_{i,0} + g_{i,1}z + \dots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1}} = \sum_{j=0}^{d_i-1} \underline{g_{i,j}z^j}$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{d_i-1} \underline{g_{i,j}} \cdot \binom{d_i + n - j - 1}{n - j} \cdot \alpha_i^{n-j} \right) \cdot z^n$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 390/402 LEA

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):
Mit

$$g_i(z) = \underline{g_{i,0} + g_{i,1}z + \dots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1}} = \sum_{j=0}^{d_i-1} \underline{g_{i,j}z^j}$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{d_i-1} \underline{g_{i,j}} \cdot \binom{d_i + n - j - 1}{n - j} \cdot \alpha_i^{n-j} \right) \cdot z^n$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 390/402 LEA

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):
Mit

$$g_i(z) = \underline{g_{i,0} + g_{i,1}z + \dots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1}} = \sum_{j=0}^{d_i-1} \underline{g_{i,j}z^j}$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{d_i-1} \underline{g_{i,j}} \cdot \binom{d_i + n - j - 1}{n - j} \cdot \alpha_i^{n-j} \right) \cdot z^n$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 390/402 LEA

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

Beweis (Forts.):
Also gilt auch, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=1}^k \underbrace{\sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n + d_i - j - 1}{d_i - 1} \cdot \alpha_i^n}_{p_i(n)} \right) \cdot z^n$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n$$

Es gilt, dass $\deg(p_i(n)) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $(f_n)_{n \geq 0} \in V_k$, also $V_3 = V_k$. \square

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 391/402 LEA

Beweis (Forts.):
 Also gilt auch, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n + d_i - j - 1}{d_i - 1} \cdot \alpha_i^n \right) \cdot z^n$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n$$

Es gilt, dass $\deg(p_i(n)) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $(f_n)_{n \geq 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. \square

Diskrete Strukturen
 ©Ernst W. Mayr
 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen
 391/402

Beweis (Forts.):
 Also gilt auch, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

Handwritten: $[z^n] \left(\sum_{i \neq 0} a_i z^i \right) = a_n$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n + d_i - j - 1}{d_i - 1} \cdot \alpha_i^n \right) \cdot z^n$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n$$

Es gilt, dass $\deg(p_i(n)) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $(f_n)_{n \geq 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. \square

Diskrete Strukturen
 ©Ernst W. Mayr
 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen
 391/402

Anwendung: Sei eine homogene Rekursion gegeben, z. B.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad F_0 = 0, F_1 = 1$$

⋮

- Drücke die Rekursion in einer einzigen Formel aus, inklusive der Anfangsbedingungen. Wie immer ist $F_n = 0$ für $n < 0$. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ gilt auch für $n = 0$, aber für $n = 1$ ist $F_1 = 1$, die rechte Seite jedoch 0. Also ist die vollständige Rekursion

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \delta_{n,1}$$

mit

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diskrete Strukturen
 ©Ernst W. Mayr
 392/402

- Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von z entspricht. Also erhalten wir:

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n z^n$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n-1} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n-2} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n,1} z^n$$

$$= z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z$$

- Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Diskrete Strukturen
 ©Ernst W. Mayr
 393/402

2 Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von z entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n z^n \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n-1} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n-2} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n,1} z^n \\
 &= z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z
 \end{aligned}$$

3 Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 393/402

2 Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von z entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n z^n \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n-1} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n-2} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n,1} z^n \\
 &= z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z
 \end{aligned}$$

3 Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 393/402

4 Drücke die rechte Seite als formale Reihe aus und ermittle daraus die Koeffizienten. Dies ist der schwierigste Schritt. Zunächst schreiben wir $1 - z - z^2$ in der Form $1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ und ermitteln dann durch Partialbruchzerlegung die Konstanten a und b , so dass gilt:

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)} = \frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z}$$

Es ergibt sich z.B.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 394/402

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= z \left(\frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z} \right) \\
 &= z \left(a \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^n + b \sum_{n \geq 0} \beta^n z^n \right) \\
 &= \sum_{n \geq 1} (a \alpha^{n-1} + b \beta^{n-1}) z^n
 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 F_n &= a \alpha^{n-1} + b \beta^{n-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right),
 \end{aligned}$$

nachdem man die Konstanten a und b etwa aus den Gleichungen für F_0 und F_1 bestimmt hat.

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 395/402

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

395 | (1195 of 1205) | 169%

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= z \left(\frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z} \right) \\
 &= z \left(a \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^n + b \sum_{n \geq 0} \beta^n z^n \right) \\
 &= \sum_{n \geq 1} (a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}) z^n
 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 F_n &= a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right),
 \end{aligned}$$

nachdem man die Konstanten a und b etwa aus den Gleichungen für F_0 und F_1 bestimmt hat.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen 395/402 LEA

Adobe Acrobat Professional - [2011-ds.pdf]

396 | (1196 of 1205) | 169%

4.12 Das Master-Theorem

Bei der Analyse von Divide-and-Conquer-Verfahren stößt man oft auf Rekursionen, die sich nicht als lineare Rekursionen formulieren lassen. So führt der Mergesort-Algorithmus in der Standardvariante zu der Rekursionsgleichung

$$C_n = C_{\lfloor n/2 \rfloor} + C_{\lceil n/2 \rceil} + n \quad \text{für alle } n > 1 \quad \text{und } C_1 = 0.$$

Löst man allgemein ein Problem der Größe n dadurch, dass man es in a Teilprobleme der Größe höchstens n/b aufteilt, so erhält man für die Laufzeit $T(n)$ eine Rekursion der Form

$$T(n) \leq a \cdot T(n/b) + f(n),$$

wobei $f(n)$ die Laufzeit für die Aufteilung in Teilprobleme und für das Zusammenfügen der Lösungen der Teilprobleme ist.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 396/402 LEA

The screenshot shows a Windows desktop environment. A command prompt window is open in the center, displaying the text: "ttt started!" followed by "When Finished with lectures, Press any key to continue...". The desktop background is dark blue, and numerous application icons are visible, including software like GeoGebra, MATLAB, and various utility programs. The taskbar at the bottom shows several open applications.