

Script generated by TTT

Title: Mayr: 2011 ds (10.01.2012)

Date: Tue Jan 10 13:44:32 CET 2012

Duration: 90:29 min

Pages: 31

WS 2011

Diskrete Strukturen


Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2011WS/ds/>

Wintersemester 2011

TUM Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr



WS 2011

Diskrete Strukturen


Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2011WS/ds/>

Wintersemester 2011

TUM Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr



4.8.2 Differenzenoperator

Definition 198
Sei f eine Funktion von \mathbb{Z} nach \mathbb{C} . Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x + 1)$ heißt **Translationsoperator**.

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x + 1) - f(x)$ heißt (Vorwärts-)Differenzenoperator.

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$


mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x - 1)$ heißt (Rückwärts-)Differenzenoperator.

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$
$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

TUM Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

333/363



4.8.2 Differenzenoperator

Definition 198

Sei f eine Funktion von \mathbb{Z} nach \mathbb{C} . Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x+1)$ heißt **Translationsoperator**.

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x+1) - f(x)$ heißt **(Vorwärts-)Differenzenoperator**.

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x-1)$ heißt **(Rückwärts-)Differenzenoperator**.

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$

$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

Beispiel 199

Sei $a \in \mathbb{N}_0$:

$$E^a(f)(x) = \underbrace{(E \circ E \circ \dots \circ E)}_a(f)(x) = f(x+a)$$

Beobachtungen:

Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

1

$$(P \pm Q)(f + g) = P(f) + P(g) \pm (Q(f) + Q(g))$$

2

$$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$

3

$$(QP)(f) = Q(P(f)), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$

4

$$\Delta^n = (E - I)^n = \underbrace{(E - I) \dots (E - I)}_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k$$

Beobachtungen:

Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

1

$$(P \pm Q)(f + g) = P(f) + P(g) \pm (Q(f) + Q(g))$$

2

$$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$

3

$$(QP)(f) = Q(P(f)), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$

4

$$\Delta^n = (E - I)^n = \underbrace{(E - I) \dots (E - I)}_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k$$

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

335 | (1011 of 1110) | 172% | Find | Text Edit

Beobachtungen:
Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

- $(P \pm Q)(f + g) = P(f) + P(g) \pm (Q(f) + Q(g))$
- $(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$
- $(QP)(f) = Q(P(f))$, i. a. $(QP)(f) \neq (PQ)(f)$
- $\Delta^n = (E - I)^n = \underbrace{(E - I) \dots (E - I)}_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.8 Summation und Differenzenoperator 335/363 LEA

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

336 | (1012 of 1110) | 172% | Find | Text Edit

Satz 200
Aus (4) folgt:

$$\Delta^n(f)(x) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right) (f)(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k).$$

Beweis:
Klar. □

Beispiel 201

$$\Delta^2(x^3) \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^2 (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 336/363 LEA

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

335 | (1011 of 1110) | 172% | Find | Text Edit

Beobachtungen:
Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

- $(P \pm Q)(f + g) = P(f) + P(g) \pm (Q(f) + Q(g))$
- $(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$
- $(QP)(f) = Q(P(f))$, i. a. $(QP)(f) \neq (PQ)(f)$
- $\Delta^n = (E - I)^n = \underbrace{(E - I) \dots (E - I)}_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.8 Summation und Differenzenoperator 335/363 LEA

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

336 | (1012 of 1110) | 172% | Find | Text Edit

Satz 200
Aus (4) folgt:

$$\Delta^n(f)(x) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right) (f)(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k).$$

Beweis:
Klar. □

Beispiel 201

$$\Delta^2(x^3) \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^2 (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 336/363 LEA

4.8.3 Fallende Fakultät

Definition 202
 Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\frac{x^n}{x^{n+1}} = \frac{1}{x-n}$.

Damit für $n = -1$ „formal“:

$$x^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

$$x^{-n} = \frac{x^{-n+1}}{x+n}$$

$$x^{-n} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{-n} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 337/363 LEA

Lemma 203
 Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

- $\Delta x^n = n \cdot x^{n-1}$
- $\nabla x^n = n \cdot x^{n-1}$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 338/363 LEA

Beweis:
 (Wir zeigen nur 1.)

- $n > 0$:

$$\Delta x^n = (x+1)^n - x^n$$

$$= (x+1) \cdot x^{n-1} - (x-n+1) \cdot x^{n-1}$$

$$= n \cdot x^{n-1}$$

- $n = 0$:

$$\Delta x^0 = (x+1)^0 - x^0 = 0 = 0 \cdot x^{-1}$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 339/363 LEA

Beweis (Forts.):

- $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$\Delta x^{-m} = (x+1)^{-m} - x^{-m}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)}$$

$$= \frac{(x+1) - (x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)}$$

$$= -m \cdot x^{-m-1}$$

□

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 340/363 LEA

4.8.4 Diskrete Stammfunktion

Definition 204
 Sei f so, dass $\Delta f = g$. Dann heißt f eine diskrete Stammfunktion von g . Schreibweise:
 $f = \sum g$.

Satz 205
 Sei f eine diskrete Stammfunktion von g . Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^b g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis:
 Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^b g(i) = \sum_{i=a}^b (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

□

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 341/363 LEA

Beweis (Forts.):

- $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$\begin{aligned} \Delta x^{-m} &= (x+1)^{-m} - x^{-m} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)} \\ &= \frac{(x+1) - (x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)} \\ &= -m \cdot x^{-m-1} \end{aligned}$$

□

TUM Diskrete Strukturen 4.8 Summation und Differenzenoperator 340/363 LEA

4.8.4 Diskrete Stammfunktion

Definition 204
 Sei f so, dass $\Delta f = g$. Dann heißt f eine diskrete Stammfunktion von g . Schreibweise:
 $f = \sum g$.

Satz 205
 Sei f eine diskrete Stammfunktion von g . Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^b g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis:
 Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^b g(i) = \sum_{i=a}^b (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

□

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 341/363 LEA

4.8.4 Diskrete Stammfunktion

Definition 204
 Sei f so, dass $\Delta f = g$. Dann heißt f eine diskrete Stammfunktion von g . Schreibweise:
 $f = \sum g$.

Satz 205
 Sei f eine diskrete Stammfunktion von g . Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^b g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis:
 Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^b g(i) = \sum_{i=a}^b (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

□

TUM Diskrete Strukturen 4.8 Summation und Differenzenoperator 341/363 LEA

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

342 | (1039 of 1110) | 172%

Text Edits

Beispiel 206

$$\sum x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

für $n \neq -1$.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

4.8 Summation und Differenzenoperator

342/363

LEA

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

343 | (1040 of 1110) | 172%

Text Edits

Beispiel 207

Sei

$$f(x) := \sum x^{-1}.$$

Dann ist (für $x \in \mathbb{N}$)

$$f(x+1) - f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \dots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A. $f(0) = 0$, damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

343/363

LEA

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

344 | (1044 of 1110) | 172%

Text Edits

Beispiel 208

Es ist $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1) \cdot a^x$.

$$\Delta \frac{a^x}{(a-1)} = a^x,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a-1)} + C$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

344/363

LEA

View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

345 | (1046 of 1110) | 172%

Text Edits

Beispiel 209

Was ist $\sum_{k=0}^n k^2$? Es gilt:

$$x^2 = x^2 + x^1.$$

Also:

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \left(\sum_{k=0}^n x^2 + \sum_{k=0}^n x^1 \right) \Big|_{x=0}^{n+1}$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{n+1}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{3} + \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

$$= \frac{n \cdot (n + \frac{1}{2}) \cdot (n+1)}{3}$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

345/363

LEA

Beispiel 209

Was ist $\sum_{k=0}^n k^2$? Es gilt:

$$x^2 = x^2 + x^1.$$

Also:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 &= \left(\sum x^2 + \sum x^1 \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{3} + \frac{(n+1) \cdot n}{2} \\ &= \frac{n \cdot (n + \frac{1}{2})(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.8 Summation und Differenzenoperator 345/363 LEA

Beispiel 210

Es ist

$$x^m = \sum_{k=0}^m S_{m,k} \cdot x^k,$$

wie wir aus der in Abschnitt 4 (Folie 276) hergeleiteten Formel sehen, wenn wir bedenken, dass diese Formel (zunächst) für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, die obige Gleichung also eine polynomielle Identität darstellt.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 346/363 LEA

Beispiel (Forts.)

Also:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^m &= \left(\sum x^m \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^m S_{m,k} \cdot x^k \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^m S_{m,k} \cdot \left(\sum x^k \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^m S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 347/363 LEA

Lemma 211 (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\ &= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x+1) \cdot g(x+1) \\ &\quad - \underbrace{f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=1} - f(x) \cdot g(x) \\ &= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\ &= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x). \end{aligned}$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 348/363 LEA

Bemerkung zur Notation:

Bei der Darstellung

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f)$$

ist zu beachten, dass die diskrete Stammfunktion nur bis auf additive Konstanten bestimmt ist, links und rechts also eigentlich Klassen von Funktionen stehen (wie bei den Landau-Symbolen).

Beispiel 212

Berechne

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta \binom{x}{m+1} &= \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} \\ &= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m}. \end{aligned}$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:

Beispiel (Forts.)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum_{x=1}^n \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum_{x=1}^n \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum_{x=1}^n \binom{x}{m} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m+1} \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1} \cdot H_1 \\ &= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{1}{m+1} \\ &= \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0. \end{aligned}$$

Lemma 213 (Newton-Darstellung von Polynomen)

Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n . Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \cdot x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^n \Delta^k f(0) \binom{x}{k}.$$

Bemerkung: Die Newton-Darstellung entspricht offensichtlich der Taylorreihenentwicklung im differenzierbaren Fall.